Support de cours

Cours:

PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet)

Vidéo:

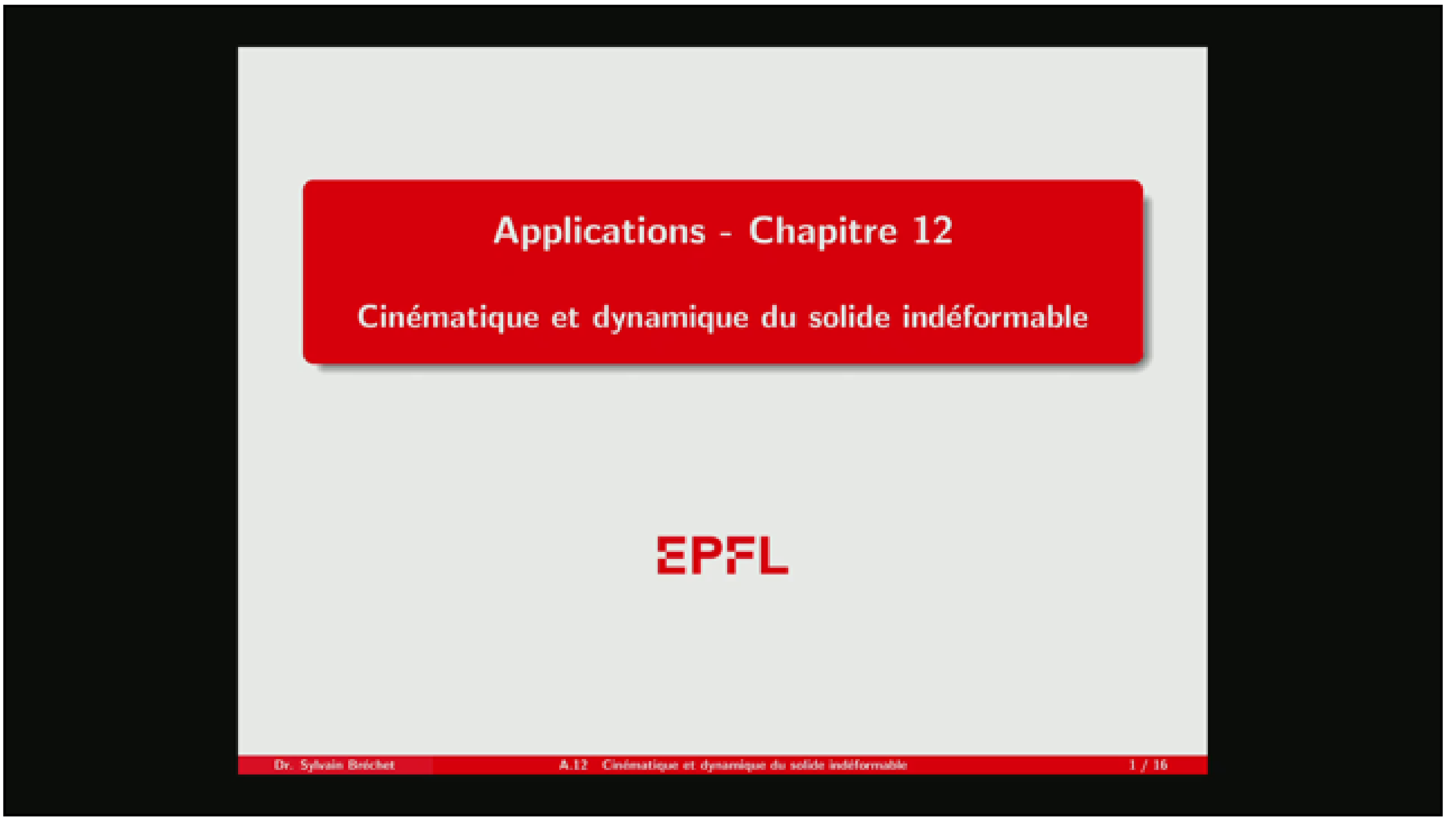
A12 - Cinématique et dynamique du solide indéformable

Concepts (extraits des sous-titres générés automatiquement) :

Points différents. Certaine force d'attraction. Moment d'inertie ig. Centre de masse. Besoin de l'accélération du centre. Niveau du point de contact. Produit vectoriel. Somme des forces extérieures. Rayons grand. Petit r. Théorème du centre de masse. Vecteur horizontal. Théorème du moment synaétique. Tension t. Force de frottement statique.

vers la recherche de séquences vidéo
(dans PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet).)

vers la vidéo

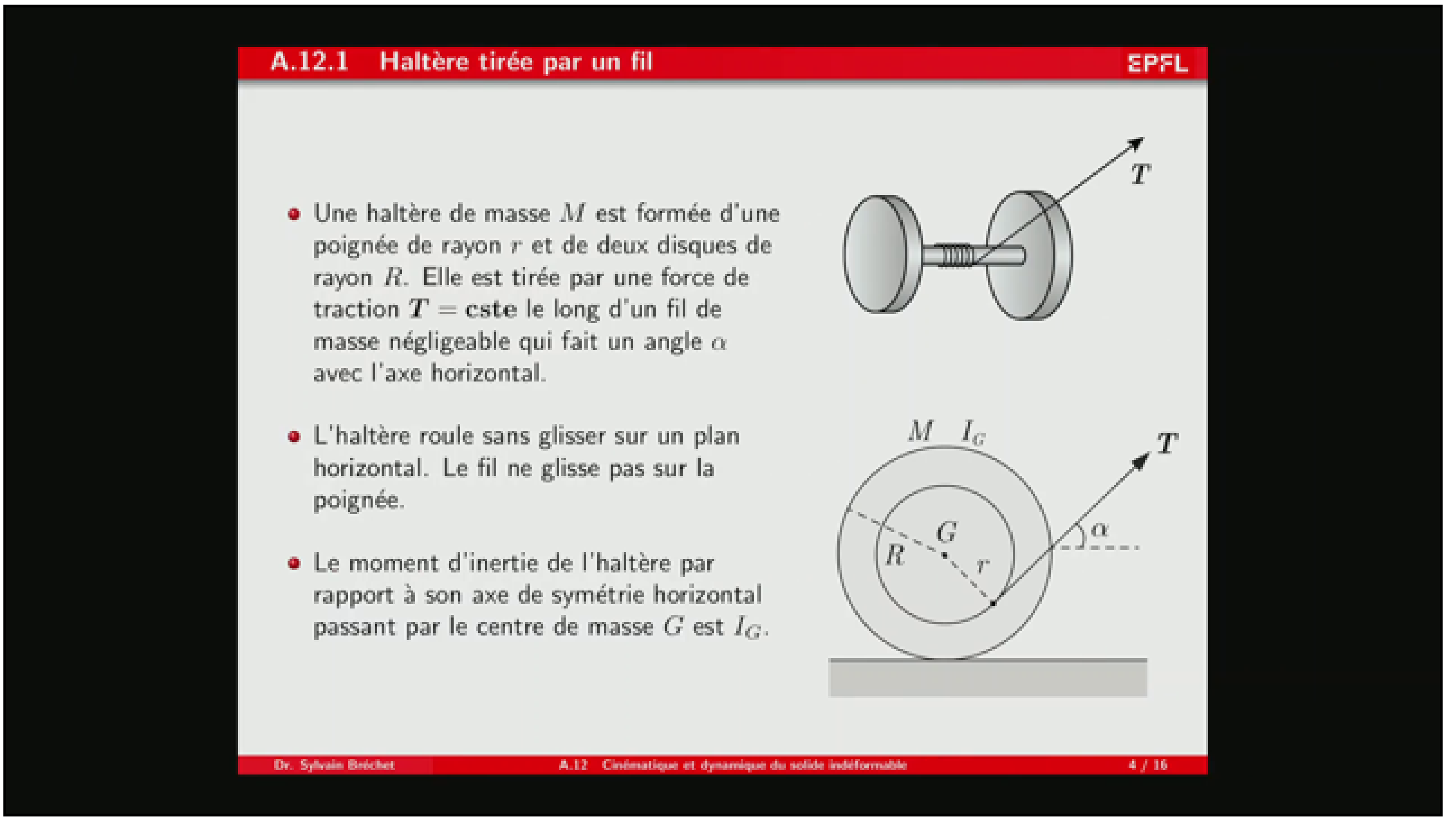


...

notes

résumé

0m 0s

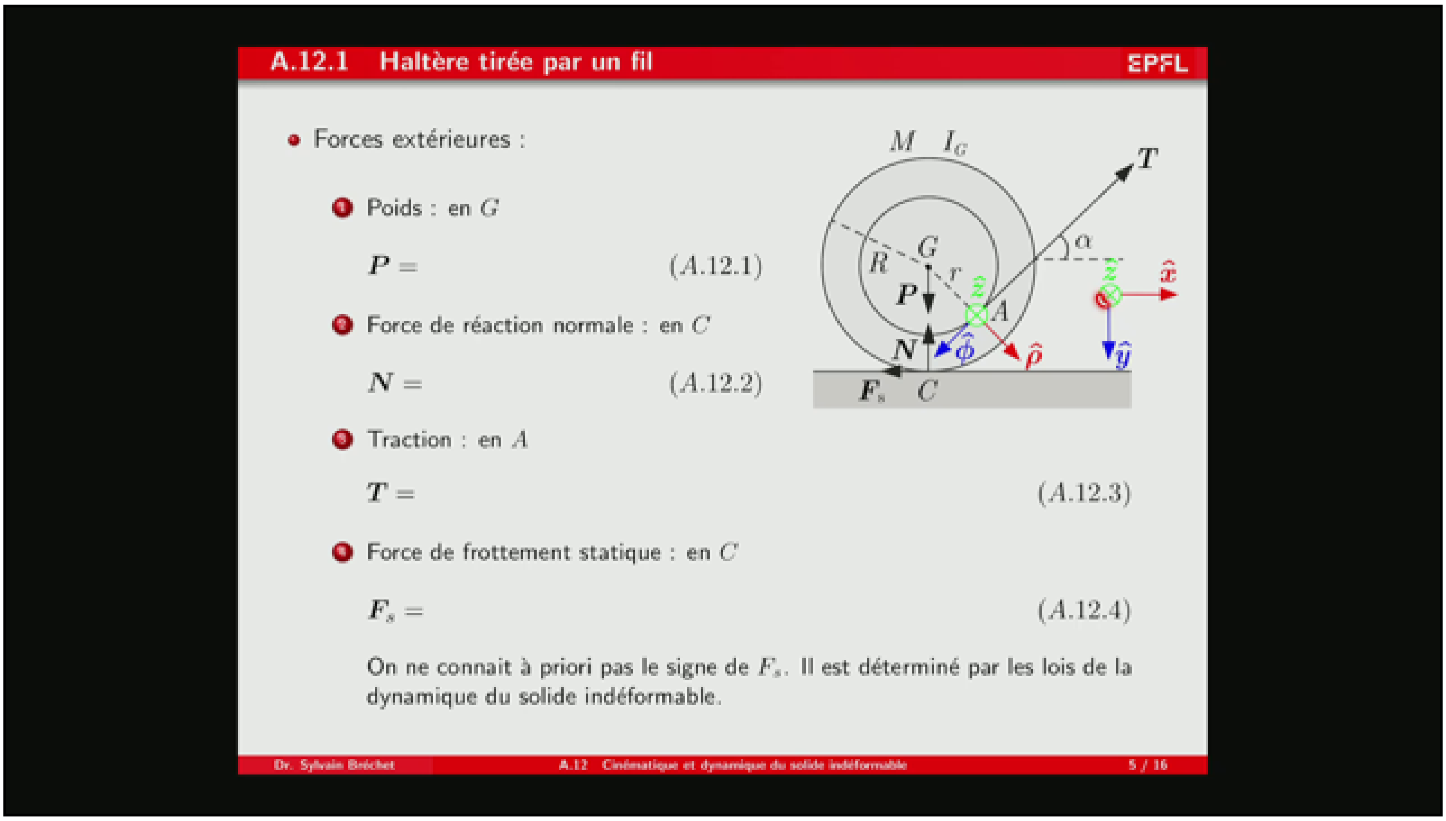


Ces sous-titres ont été générés automatiquement Voilà, bonjour, re-bonjour. On va discuter maintenant des applications de ce 12e chapitre de cours. D'accord ? Alors, on va commencer par faire du fitness. On va parler d'Alterre. D'accord ? Mais une Alterre autour de laquelle ? Autour de laquelle on a placé un fil et sur laquelle on tire. D'accord ? Et puis ensuite, on parlera du yoyo. On va ensemble déterminer la physique du yoyo. Alors, commençons par l'Alterre.

notes

résumé

0m 1s

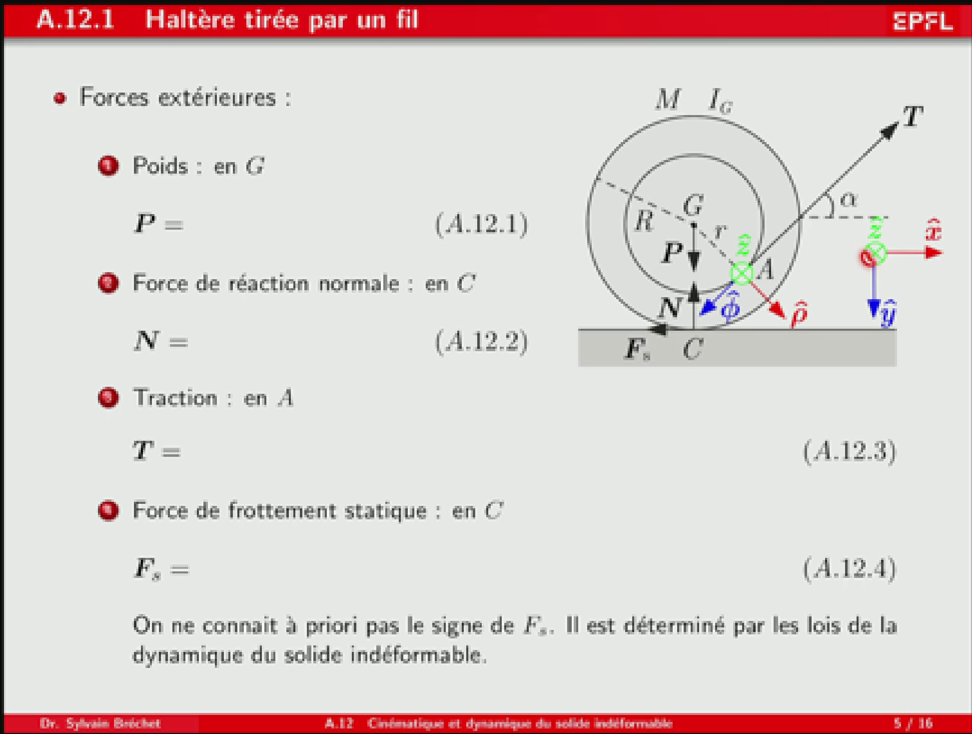


Alors, vous imaginez une Alterre qui ressemble à ça. Vous avez deux gros disques avec un autre cylindre qui est ici qui est la poignée. La poignée a un rayon petit air. Ces disques ont des rayons grand air. Vous avez un fil qui est enroulé autour de la poignée et vous tirez sur le fil avec une certaine force d'attraction. D'accord ? Vous avez un roulement sans glissement. Alors, la première question que je vous pose en regardant le dessin comme ça, à votre avis en tirant sur le fil, est-ce que la bobine va s'enrouler ? Est-ce qu'elle va donc tourner dans le sens des aiguilles d'une montre vers la droite ? Ou est-ce qu'elle va plutôt se dérouler et tourner vers la gauche ? Oui ? Alors, ce n'est pas tout à fait vrai, mais le fait que ça dépend ne s'est pas complètement faux non plus. Ça dépend de quelque chose, effectivement. Alors, est-ce que vous pensez que ça en ira toujours à droite ou qu'on ira toujours à gauche en général ? Alors, qui pense qu'on parle ? Qui pense que, disons, la bobine s'enroule et qu'elle se déroule vers la droite ? Donc qu'elle va tourner, si vous voulez, avec un mouvement de rotation dans le sens aiguillement. Lèvez la main. OK ? Qui pense que c'est le contraire ? Qui pense que c'est plus compliqué ? Ah, tiens, il y en a qui pensent à double. Bon, c'est une superposition d'état comme un mécanique quantique. En fait, c'est effectivement plus compliqué que ça. Les deux sont possibles. La preuve en image. Vous avez ici une bobine. Je vais tirer dessus. Elle s'enroule. Elle se déroule. D'accord ? Donc c'est l'un ou l'autre, avec une condition bien particulière qu'on va essayer de déterminer ensemble. Donc c'est pas un problème. C'est un problème d'apparence simple. Il n'est pas si simple que ça. Oui, Marco, vous

notes

résumé

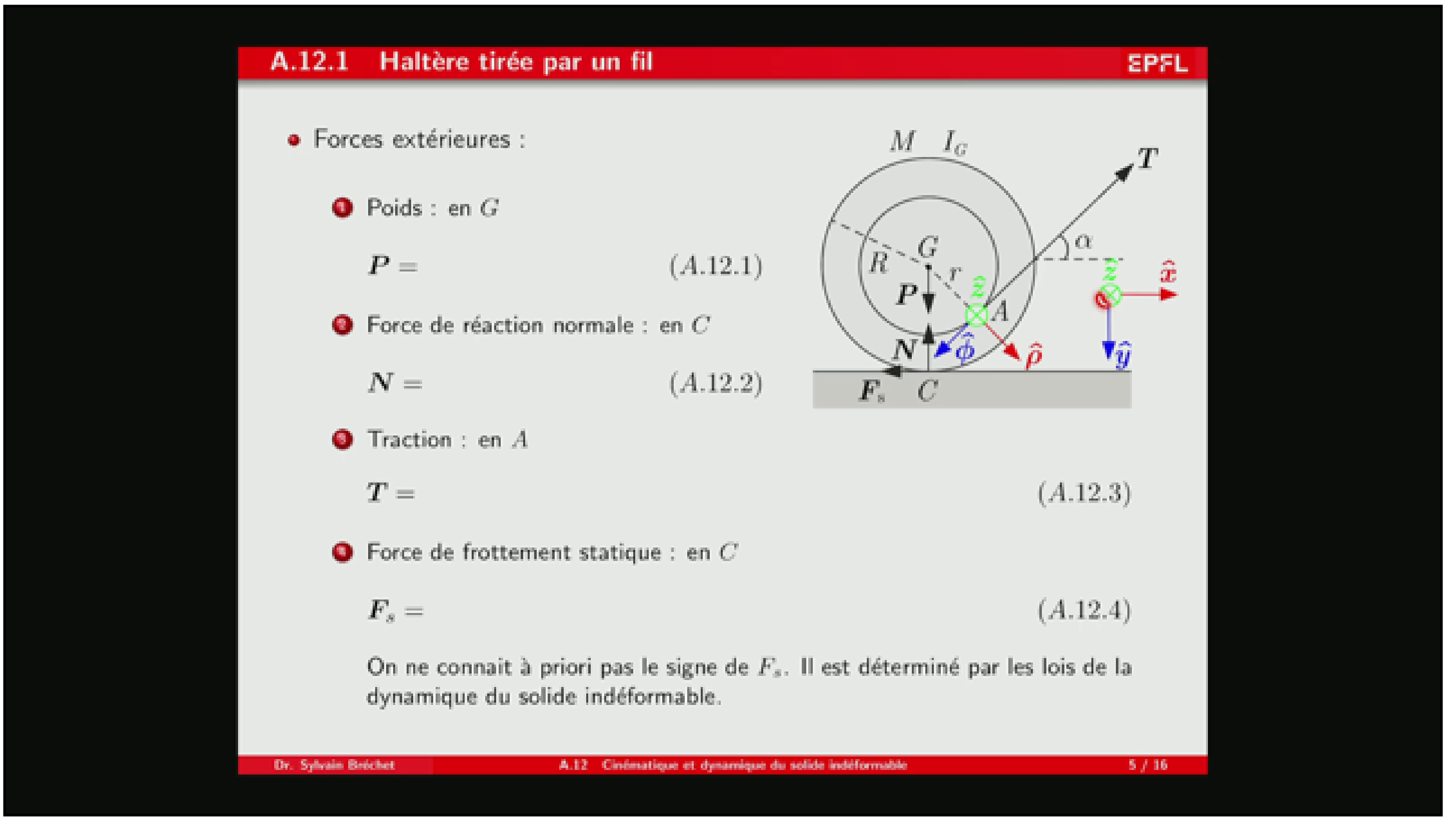
0m 41s



avez une question ? Non ? Vous avez une question, je vous ai vu, avec la main levée. Ah, d'accord, OK. Attends pour moi. Voilà. Donc, notre altère, à un moment d'inertie IG, pour une rotation autour de son axe symétrique, il ne passe pas le centre de masse. D'accord ? Et puis on va supposer que l'angle que fait le fil avec l'horizontale, c'est un angle alpha. Donc maintenant, on y va, on se lance et on applique les théorèmes de base de la dynamique du solide indéformable. OK ? Voilà. Donc, la chose à faire, ça va être d'appliquer, premièrement, le théorème du centre de masse au centre de masse, d'accord ? Et ensuite, le théorème du moment synaétique, on va aussi appliquer au centre de masse. Bon. Dans le théorème du centre de masse, on fait intervenir la somme des forces extérieures qui s'appliquent sur l'objet, sur le solide indéformable qui est l'altère. D'accord ? Elles peuvent être appliquées en des points différents. C'est pas un problème, d'accord ? Puisque c'est une somme vectorielle de vecteurs-forces, même s'ils sont appliqués en des points différents. Donc, quand on a un solide indéformable, c'est bien d'être précis, de dire quelles forces s'appliquent où ? D'accord ? Alors, il y a, dans ce problème, quatre forces. Il y en a une première qui est évidente, c'est le poids, pardon, qui est appliquée au centre de masse vers le bas. Il y en a une deuxième qui est aussi évidente. C'est la force de réaction normale qui va être exercée par le sol sur l'altère qui est orientée vers le haut, appliquée au niveau du point de contact. D'accord ? Il y en a une troisième qui est évidemment présente aussi. C'est la force de traction à laquelle on tire sur le fil. Alors, où est-ce qu'elle va s'appliquer concrètement au niveau de l'altère ? Elle va s'appliquer au point de

notes

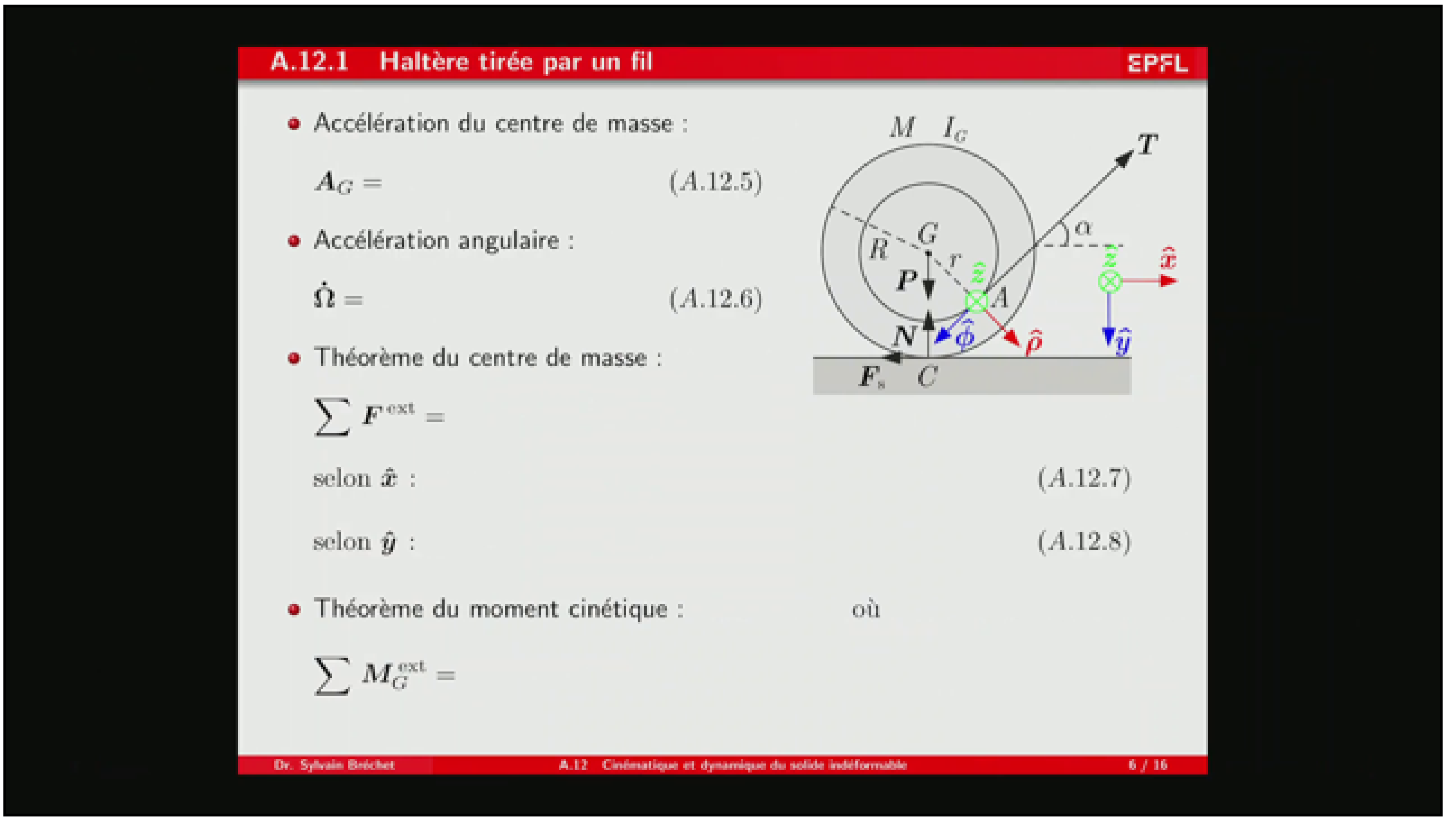
résumé



contact entre le fil et l'altère. C'est pas le point de contact avec le sol, c'est le point A. Bon. Et puis, on a une dernière qui faut pas oublier. Cette dernière, c'est la force de frottement statique qui va retenir le point de contact pour que le solide de l'altère puisse basculer, pivoter autour du point de contact. D'accord ? Et qu'on ait un roulement sans glissement. Si ce n'est pas le cas, tirez avec le fil, on a un glissement. Non. On retient le point de contact, donc il y a une force de frottement statique. Alors, commençons par le poids. Déjà oui, pour les exprimer en composantes dans un repère, on va en fait ici introduire deux repères. Pourquoi deux repères ? Parce que ce qui va être intéressant, c'est le mouvement de rotation autour de l'axe horizontal. On va prendre deux repères qui ont un vecteur horizontal. Ce vecteur sera le vecteur Z-chapo qui rentre dans le plan de profil. D'accord ? Ensuite, pour traiter du moment de force liée à l'attention le plus simple, c'est de prendre un repère cylindrique attaché au point A, avec un vecteur unitaire au chapeau qui est orienté vers l'extérieur, fiche chapeau qui est orientée tangentiellement au fil, dans le sens ici des aiguilles d'une montre, dans le sens horaire. Pourquoi ? Parce que le produit vectoriel des deux va nous donner un vecteur Z-chapo qui rentre dans le plan.

notes

résumé

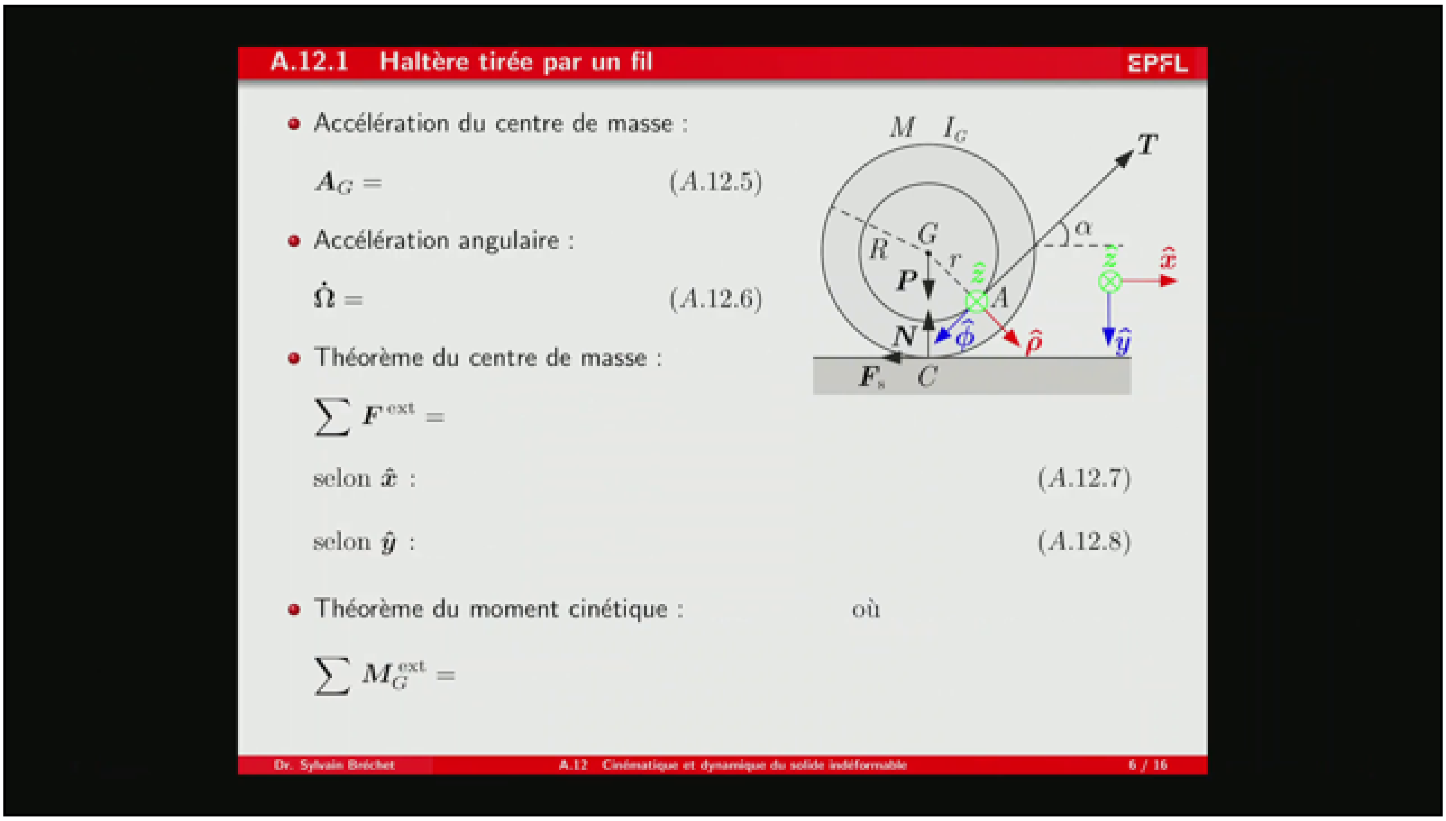


Alors on va aussi utiliser un repère cartésien avec toujours un Z-chapo qui rentre dans le plan. On choisira donc un X-chapo qui est orienté horizontalement vers la droite, un Y-chapo qui est orienté verticalement vers le bas. Le produit vectoriel de ces deux premiers vecteurs nous donne le vecteur Z-chapo. D'accord ? Alors, le poids, c'est le produit d'un mass foilchand gravitationnel qu'on représente dans le repère cartésien. Il est orienté vers le bas, c'est la masse foilchand gravitationnelle foilvector unitaire vertical qui est Y-chapo orienté vers le bas. La force de réaction normale, elle, elle est orientée vers le haut. D'accord ? Le vecteur Y-chapo, il est orienté vers le bas. Donc la force de réaction normale, ça va être en fait moins la norme de cette force de réaction normale n, foilvector unitaire orienté vers le haut qui est moins Y-chapo. Ensuite, en ce qui concerne la force de traction avec laquelle on tire sur le fil qui est orienté le long du fil vers l'extérieur, le plus simple, c'est évidemment de la représenter encore donné cylindrique ici. Donc c'est moité foie le vecteur unitaire Y-chapo. On peut aussi évidemment l'écrire encore donné cartésienne, auquel cas on aura T foilcosinus de alpha foilx-chapo moité foilcinus de alpha foily-chapo. D'accord ? Quand on projette. Qu'en est-il maintenant de la force de frottement statique ? Est-ce qu'elle est orientée vers la gauche comme sur le dessin ? Est-ce qu'elle pourrait être orientée vers la droite intuitivement avant d'avoir fait de la physique ? On regarde dans le problème, si on regarde comment bouge l'altère, on se rend compte qu'elle peut soit se dérouler, soit s'enrouler. On aurait donc envie de penser que la force de frottement statique peut changer d'orientation. D'accord ? On verra qu'en fait c'est pas le cas. C'est pas très intuitif, mais ça sera pas le cas. D'accord ? Mais a priori quand on sait pas

notes

résumé

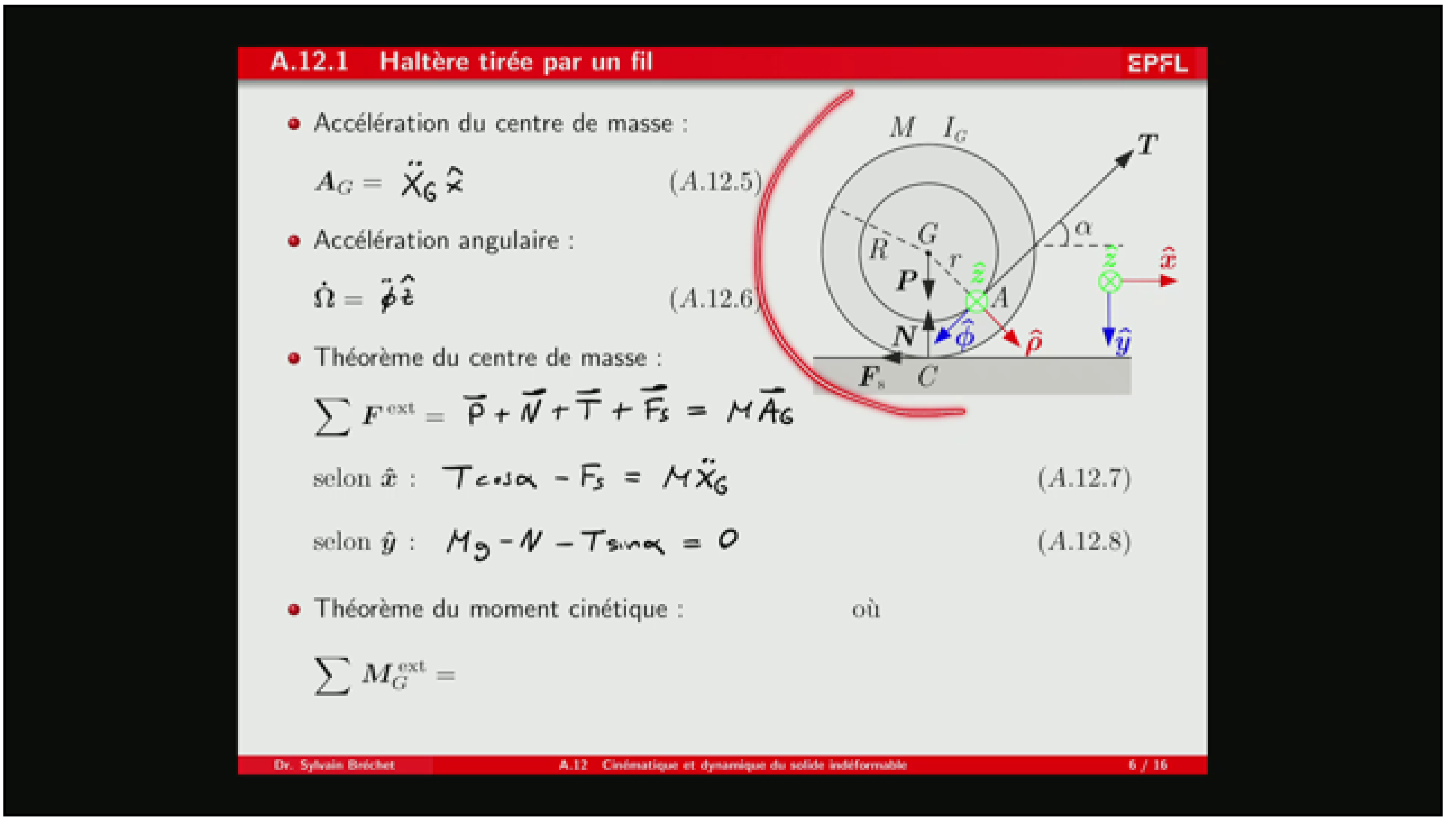
6m 1s



comment elle est orientée, ce qu'on sait forcément, c'est que si vous voulez, tangente au plan. D'accord ? Puisqu'elle est due à l'interaction entre le point de contact et la surface. Elle peut être orientée vers la gauche, elle peut être orientée vers la droite, peu importe. Orientons-la par exemple vers la gauche. Auquel cas, on aura moins fs, fyi que ce chapeau. Si vous l'aviez par exemple orientée vers la droite, eh bien le signe de la composante que vous allez obtenir va être l'opposé du signe de la composante qu'on a obtenue en l'orientant vers la gauche. Donc peu importe, c'est la dynamique du problème qui va répondre à la question. Ok ? Le choix éclairé, c'est de l'orienter vers la gauche. En connaissance de cause, on verra ça plus tard. D'accord ? Bon, pour pouvoir appliquer nos théorèmes,

notes

résumé



on aura besoin de l'accélération du centre de masse, qui est la dérivée temporelle seconde, la coordonnée de position horizontale du centre de masse, grand xg.1, fois le vecteur unitaire x chapeau. C'est-à-dire que notre accélération est définie positive pour un mouvement du centre de masse vers la droite dans le sens du vecteur x chapeau. D'accord ? Qu'en est-il maintenant de l'accélération ongulaire ? Eh bien pour l'accélération ongulaire, il faut déjà comprendre comment est orientée la vitesse ongulaire omega. On a fait un choix de paramétrisation. Ce choix de paramétrisation est défini par le repère cylindrique qu'on a pris ici avec le vecteur phi chapeau qui est orienté dans le sens horaire. Donc, vous faites tourner la paume de la main droite dans le sens horaire. Qu'est-ce que vous voyez ? Le pouce, il rentre dans le plan. D'accord ? Donc, le pouce donne l'orientation du vecteur omega. On le dérive par rapport au temps de l'orientation du vecteur omega point, qui est l'accélération ongulaire. D'accord ? Omega est de la forme phi point, fois z chapeau. Omega point sera de la forme phi point point, fois z chapeau. Donc, encore une fois, quand vous avez introduit vos repères, vos grandeurs, que ce soit l'accélération du centre de masse, que ce soit la vitesse ongulaire, l'accélération ongulaire, leur orientation, elle est déterminée par le choix de la paramétrisation. Ça veut pas forcément dire que phi point point est positif. Phi point point peut être négatif. Xg point point n'est pas forcément positif, mais peut aussi être négatif. Ça dépendra de la dynamique. Mais pour être cohérents, on est obligé d'orienter ces vecteurs dans le sens pré-définie par les vecteurs unitaires. D'accord ? Donc, maintenant, on va écrire le théorème du centre de masse. La somme des forces extérieures qui s'exercent sur le solide indéformable, à savoir son poids qui s'exerce au centre de masse, la force de

notes

résumé

8m 37s

A.12.1 Haltère tirée par un fil

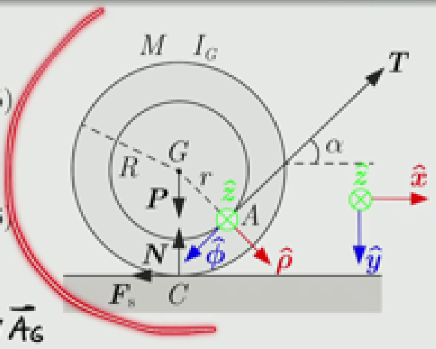
EPFL

- Accélération du centre de masse :

$$A_G = \ddot{X}_G \, \hat{x} \qquad (A.12.5)$$

- Accélération angulaire :

$$\dot{\Omega} = \ddot{\phi} \, \hat{z} \qquad (A.12.6)$$



- Théorème du centre de masse :

$$\sum F^{ext} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_s = M\vec{A}_G$$

selon $\hat{x}$: $T\cos\alpha - F_s = M\ddot{X}_G$ (A.12.7)

selon $\hat{y}$: $Mg - N - T\sin\alpha = 0$ (A.12.8)

- Théorème du moment cinétique : où

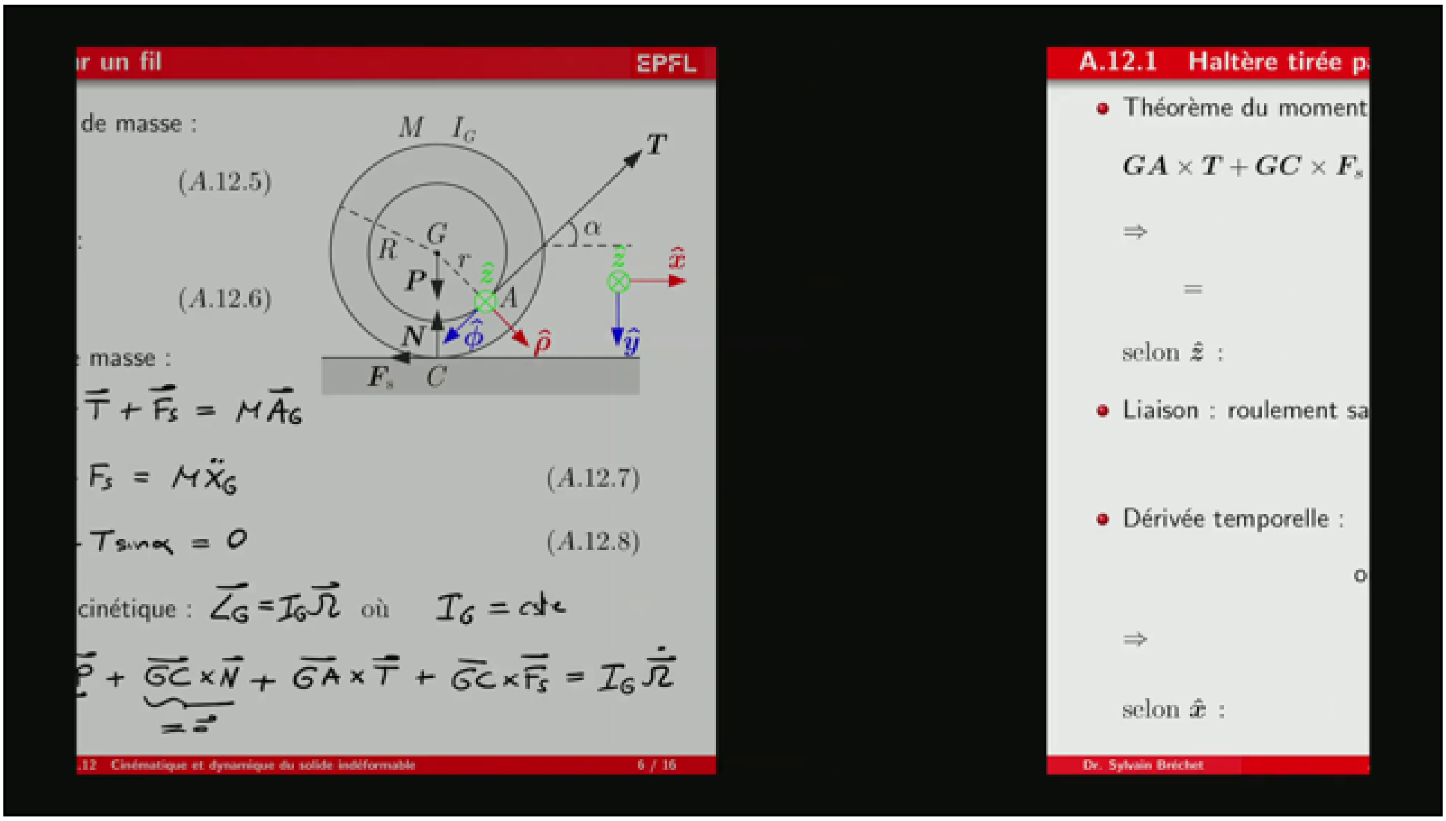
$$\sum M_G^{ext} =$$

Dr. Sylvain Bréchet A.12 Cinématique et dynamique du solide indéformable 6 / 16

réaction normale exercée au point de contact avec le sol, ainsi que l'attention exercée au point de contact entre la poignée et le fil, plus la force de frottement qui s'exerce au point de contact avec le sol, la somme de ces quatre forces est égale au produit de la masse fois l'accélération du centre de masse. On va donc prendre toutes ces forces, écrite vectoriellement les substituts dans le théorème du centre de masse et on le projette le long des deux lignes de coordonnées, la ligne de coordonnées horizontales et la verticale. Alors, pour la coordonnée horizontale, il n'y a pas de contribution du poids ni de la force de réaction normale qui sont horizontales. Pour l'attention, lorsqu'on projette, on a des fois le cocinus de alpha. D'accord ? Et puis, pour la force de frottement statique, qu'on a choisi d'orienter vers la gauche, on va se retrouver avec moins fs. Dans le monde de droite, on aura le produit de la masse fois la composante de l'accélération, selon l'axe horizontal, la seule composante non nulle, qui est xg.p. Selon l'axe vertical maintenant. Pour le poids, on va se retrouver étant donné que ychap est orienté vers le bas, avec mg, n est orienté vers le haut, on a moins n. Pour l'attention, lorsqu'on projette, on a mointé fois le cocinus de l'angle alpha, il y a évidemment qu'une contribution de la force de frottement statique qui est horizontale. Dans le monde de droite, c'est strictement nulle, étant donné que le centre de masse se déplace uniquement horizontalement. D'accord ? Maintenant, il faut qu'on applique le théorème du moment cinétique. Bon.

notes

résumé

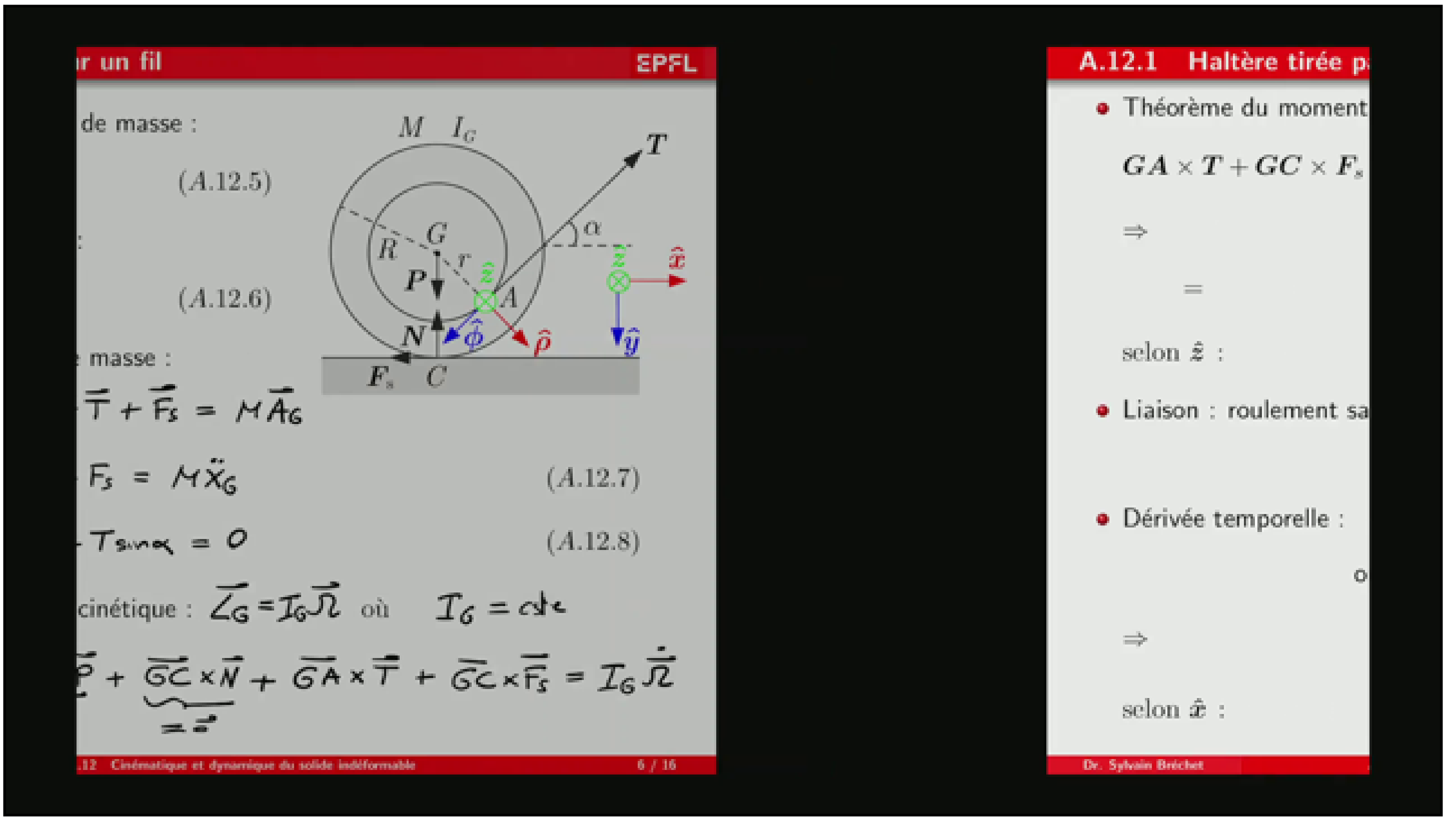


Alors, regardons bien la situation physique. Notre altère, elle tourne autour de son axe de symétrie, d'accord ? Elle tourne autour d'un axe horizontal qui passe par g. Cet axe de symétrie, c'est un axe principal d'inertie, ce qui veut dire que le vecteur moment cinétique, il est forcément colliné au vecteur vitesse angulaire omega, qui est orienté selon cet axe principal d'inertie. D'autre terme, dans ce cas-là, le vecteur moment cinétique lg est alors colliné à omega, et le facteur de proportionnalité, c'est le moment d'inertie ig de notre altère autour de l'axe qui passe par le centre de masse. Évidemment, c'est un solide indéformable, ce qui veut dire que ce moment d'inertie ig est une constante. D'accord ? Donc maintenant, on va pouvoir appliquer formellement le théorème du moment cinétique qu'on va évaluer par rapport au centre de masse. On va donc devoir écrire la somme des quatre moments de force liés aux quatre forces. Commençons par le poids. Le moment de force évalué en g pour le poids, c'est le vecteur position relative du point d'application du poids qui est le centre de masse. C'est donc le vecteur gg, vous l'aurez compris, gg est un vecteur de norme nul, puisque le point d'arrivée correspond au point de départ. Donc quand on fait le produit vectoriel avec le poids, on a bien entendu une contribution nul. D'accord ? Continuons. Prenons maintenant le moment de force lié à la force de réaction normale. Eh bien, on va d'abord avoir le vecteur position relative du point d'application de la force de réaction normale qui est le point de contact. C'est un vecteur issu de g qui pointe sur le point c. On fait le produit vectoriel avec la force de réaction normale n. Regardez le dessin. Le vecteur gc, c'est un vecteur vertical orienté vers le bas. La force de réaction normale est les verticales orientées vers le haut. Leur

notes

résumé

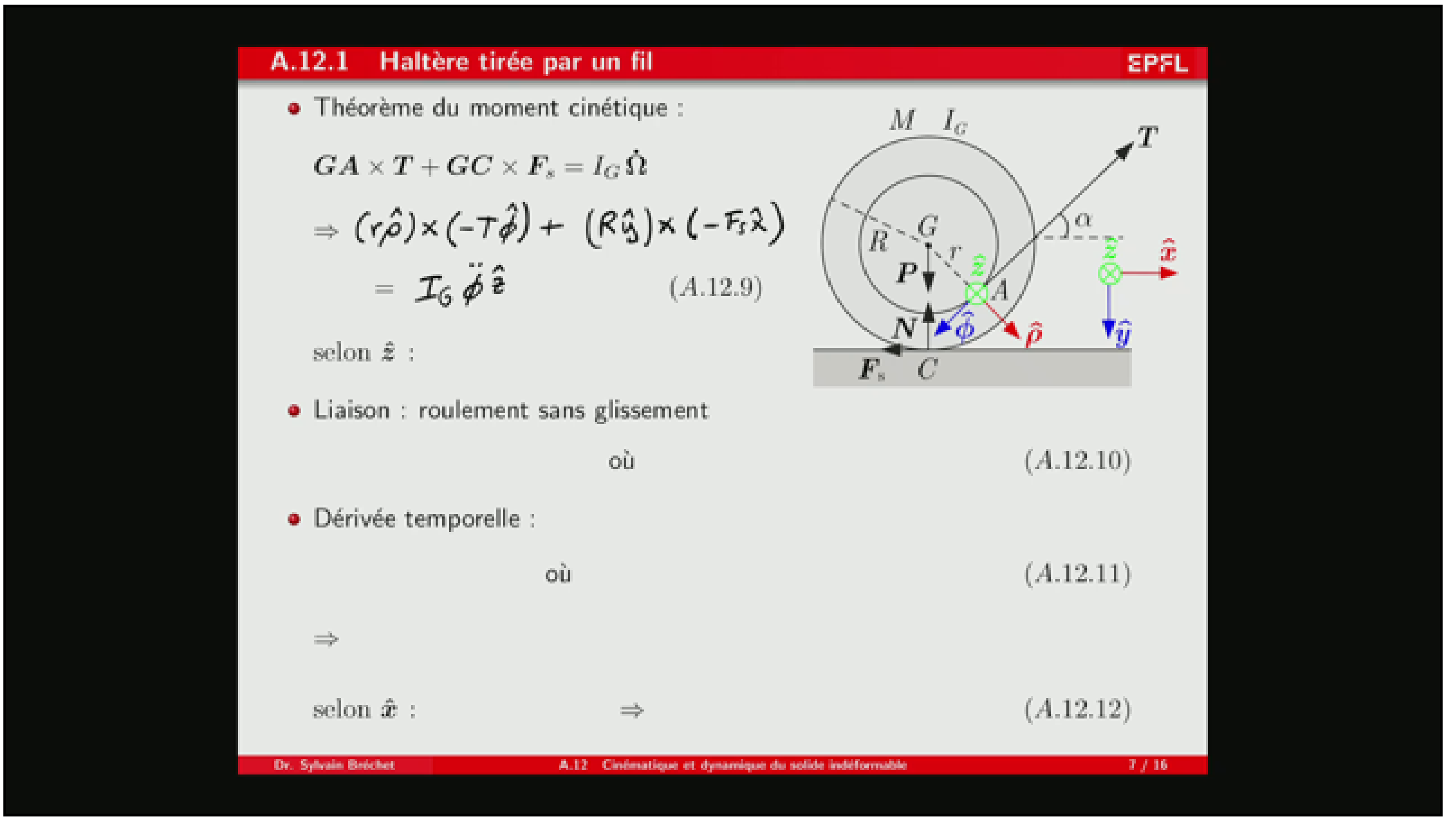
12m 1s



produit vectoriel est évidemment nul. Donc là encore, aucune contribution intéressante. On n'a pas terminé, heureusement d'ailleurs. Il nous reste deux moments de force à déterminer. Le moment de force lié à la force de traction dans le fil. Eh bien, ce moment de force, ça va être le produit vectoriel du vecteur position relative du point de contact entre le fil et la poignée. C'est-à-dire le vecteur issu du centre de masse qui pointe sur le point a, produit vectoriel avec la force de traction exercée sur le fil. Il nous reste un dernier moment qui est important, puisque la force de frottement statique permet de faire pivoter l'altère. Ce moment de force, c'est le produit vectoriel du vecteur. Point d'application de la force de frottement statique, qui est le vecteur gc, produit vectoriel avec cette force. Mais ici, gc est orthogonal à fs, contrairement à n. Cette contribution est non nul, elle est même intéressante et est essentielle. Dans le membre de droite, qu'est-ce qu'on va avoir ? La dérivé temporelle du moment cinétique évalué au centre de masse. Le moment cinétique, il est là. C'est le produit du moment d'inertie qui est constant, fois le vecteur vitesse angulaire de rotation. Donc on va dériver ce vecteur, on aura le moment d'inertie constant, fois la dérivé temporelle du vecteur vitesse angulaire, qui est évidemment le vecteur accélération angulaire. Bon, alors on se résume. L'équation essentielle pour la dynamique du centre de masse, c'est évidemment la projection du théorème du centre de masse, le long de l'axe horizontal. Il faut maintenant qu'on extrait de ce théorème du centre de masse, l'information essentielle qui a trait à la rotation d'alaltère autour de l'axe horizontal qui passe par le centre de masse et il faudra qu'on les lie ensemble. C'est ça, l'objectif.

notes

résumé

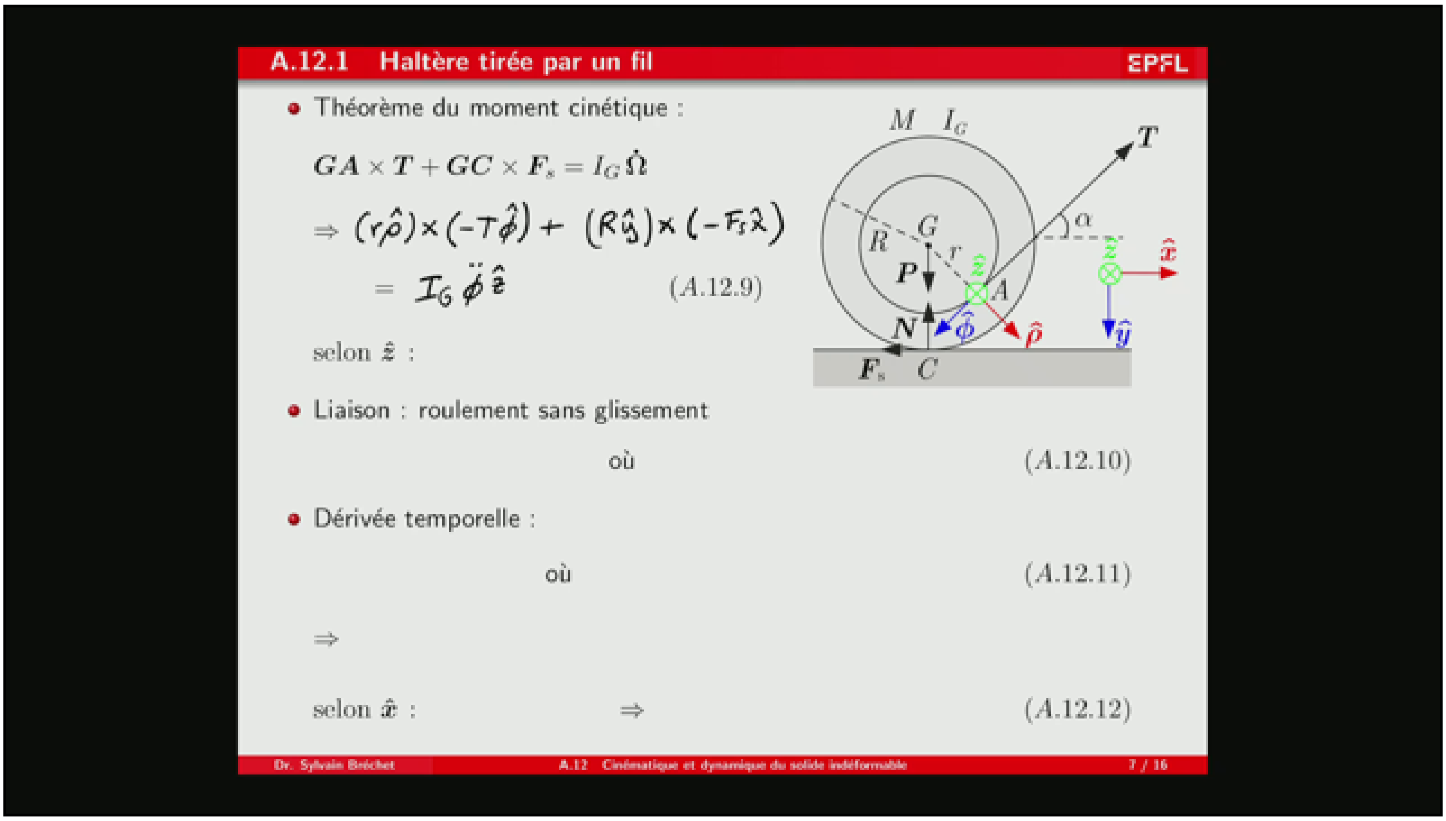


Donc si on prend ce qui est non nul dans le théorème du moment cinétique, on a les deux moments non nuls, celui de la force de traction, celui de la force de frottement statique, la somme vectorielle des deux, c'est le produit du moment d'inertie, fois le vecteur accélération angulaire. Écrivons ces moments en composant. Alors pour le moment de force liée à la force de traction, la force de traction le plus simple de loin, c'est de prendre le repère cylindrique. Le vecteur GA, c'est un vecteur dont la norme correspond au rayon de la poignée, la poitière, multiplié donc par le vecteur unitaire au chapeau orienté vers l'extérieur. On prend le produit vectoriel de ce vecteur GA avec la tension T, qu'on écrit encore d'un an cylindrique, c'est de moins la norme de la force de traction multiplié par le vecteur unitaire asimutale fi chapeau. Et puis on a également le moment de force liée à la force de frottement statique, c'est le produit vectoriel de GC, GC est un vecteur vertical dont la norme correspond au rayon des disques, grand air. C'est grand air, fois le vecteur unitaire vertical orienté vers le bas qui est Y chapeau, on prend le produit vectoriel avec la force de frottement statique orienté vers la gauche qui est donc moins FS, fois X chapeau. Dans le membre de droite, on a le produit du moment d'inertie IG, fois le vecteur accélération angulaire omega point, qui est fi point point, fois Z chapeau. Ok ? Alors, clairement, les deux moments vont être orientés selon Z chapeau. Parce que le produit vectoriel de Ro chapeau avec fi chapeau, des deux premiers vecteurs du repère cylindrique nous donnent le troisième, c'est Z chapeau. Donc on va se retrouver avec un moins RT fois Z chapeau. Pour le deuxième terme, le produit vectoriel de Y chapeau avec X chapeau, du deuxième avec le premier,

notes

résumé

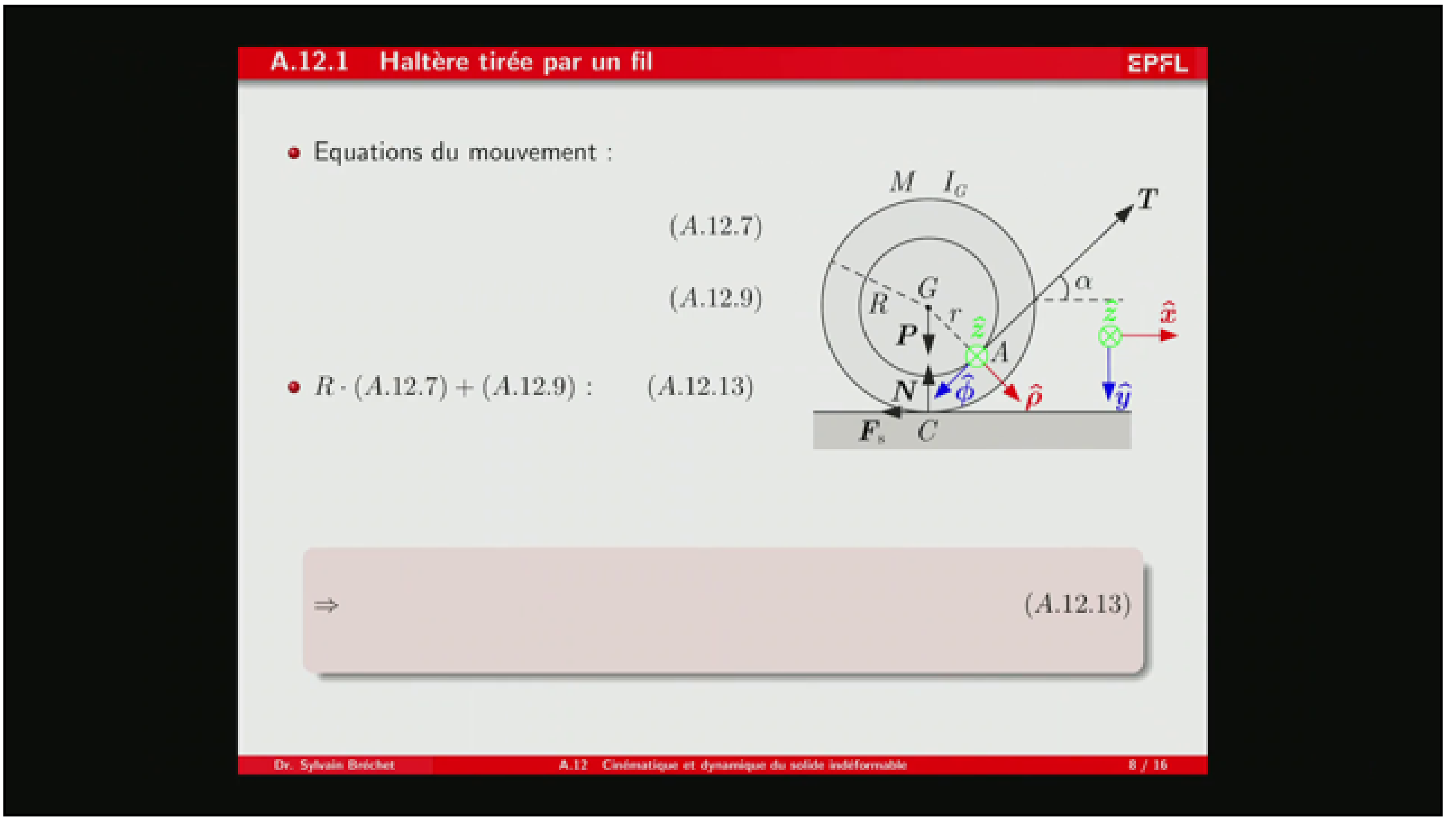
15m 49s



c'est moins Z chapeau. D'accord ? Donc, si on projette cette équation, selon l'axe horizontal, donnée par le vecteur Z chapeau, l'axe de rotation, on va se retrouver pour le moment de force liée à la tension,

notes

résumé

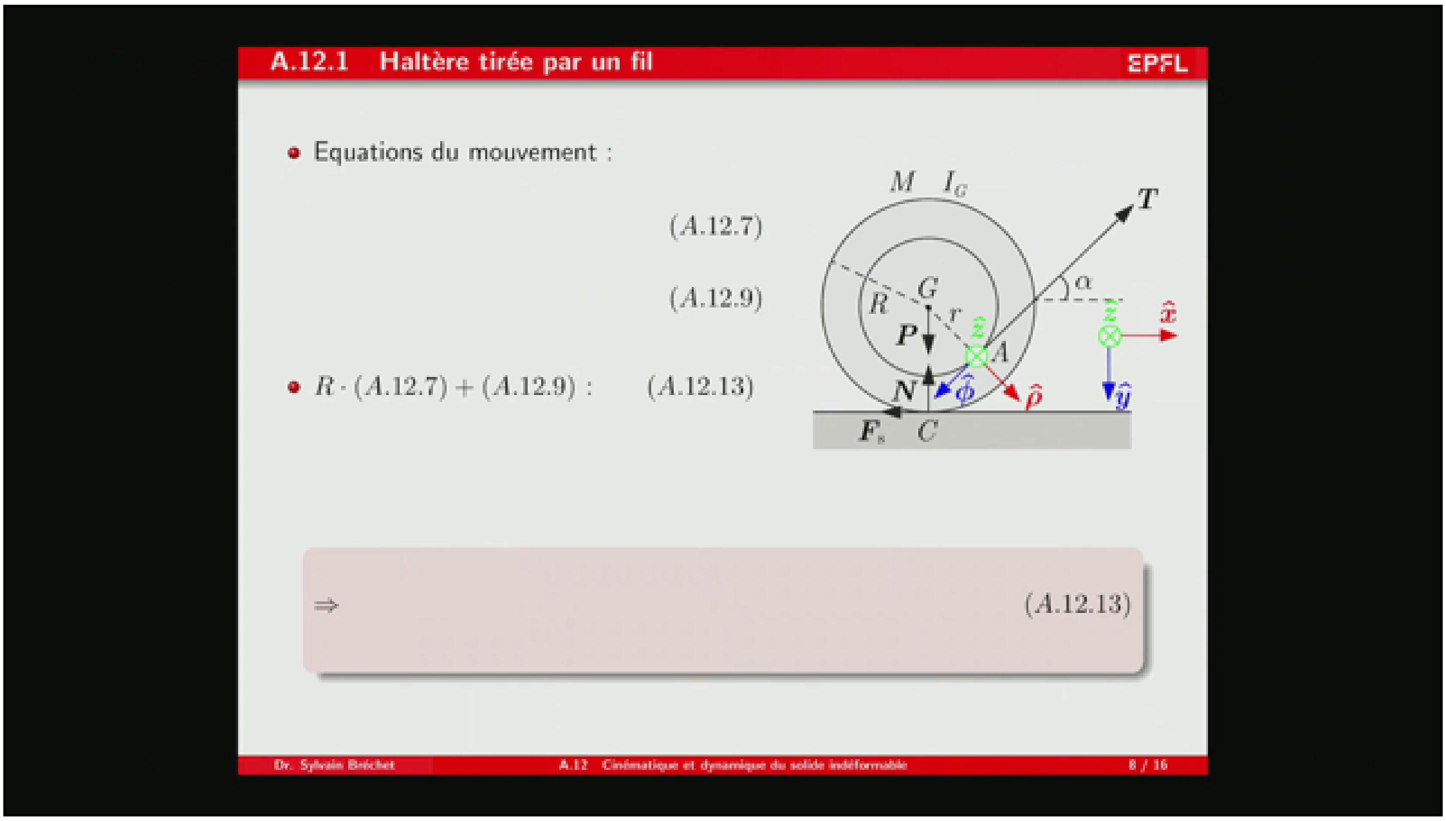


avec moins petit air grand air, grand air, pour le moment de force de la force de frottement statique, on aura grand air fois FS, et dans le nombre de droites, on aura IG fois fi point point. Donc là, on a une équation qui décrit le mouvement de rotation propre du solide indéformable autour de l'axe horizontal qui passe par le centre de masse. Et l'alert découplé de la première équation intéressante, qui est l'équation A127, qui décrit le mouvement du centre de masse. Mais c'est pas vrai, dans la pratique. Pourquoi ? Parce qu'on connaît le type de mouvement de l'Alterre. La liaison, la colle physique, elle est au niveau du point de contact entre l'Alterre et le sol. On a un mouvement de roulement sans glissement. Donc il faut que l'on tienne compte de cette liaison maintenant. D'accord ? De manière générale, la vitesse du point G, c'est la vitesse du point C, plus le pro du vectoriel de omega, avec CG. D'accord ? Sachant qu'on a un roulement sans glissement. Ce qui veut dire que la vitesse du point de contact, Vc, est nul. J'insiste. C'est parce que le sol ne bouge pas. Vous aurez un joli problème en exercice. Vous avez un cylindre qui roule sur une feuille et on tire sur la feuille de papier. Et vous avez un roulement sans glissement du cylindre par rapport à la feuille. Sachant que la feuille elle bouge. Donc par rapport référentiel de la table. D'accord ? Le point de contact se déplace quand même. C'est un problème important. On recommande de bien le faire. D'accord ? Voilà. Au moins c'est dit. Donc, si on prend la condition d'un roulement sans glissement qui est ici, nous, ce qui nous intéresse, c'est de lier l'accélération du centre de masse à l'accélération angulaire. Regardez bien ce qu'il va rester. La vitesse du centre de masse, la vitesse angulaire, qu'est-ce

notes

résumé

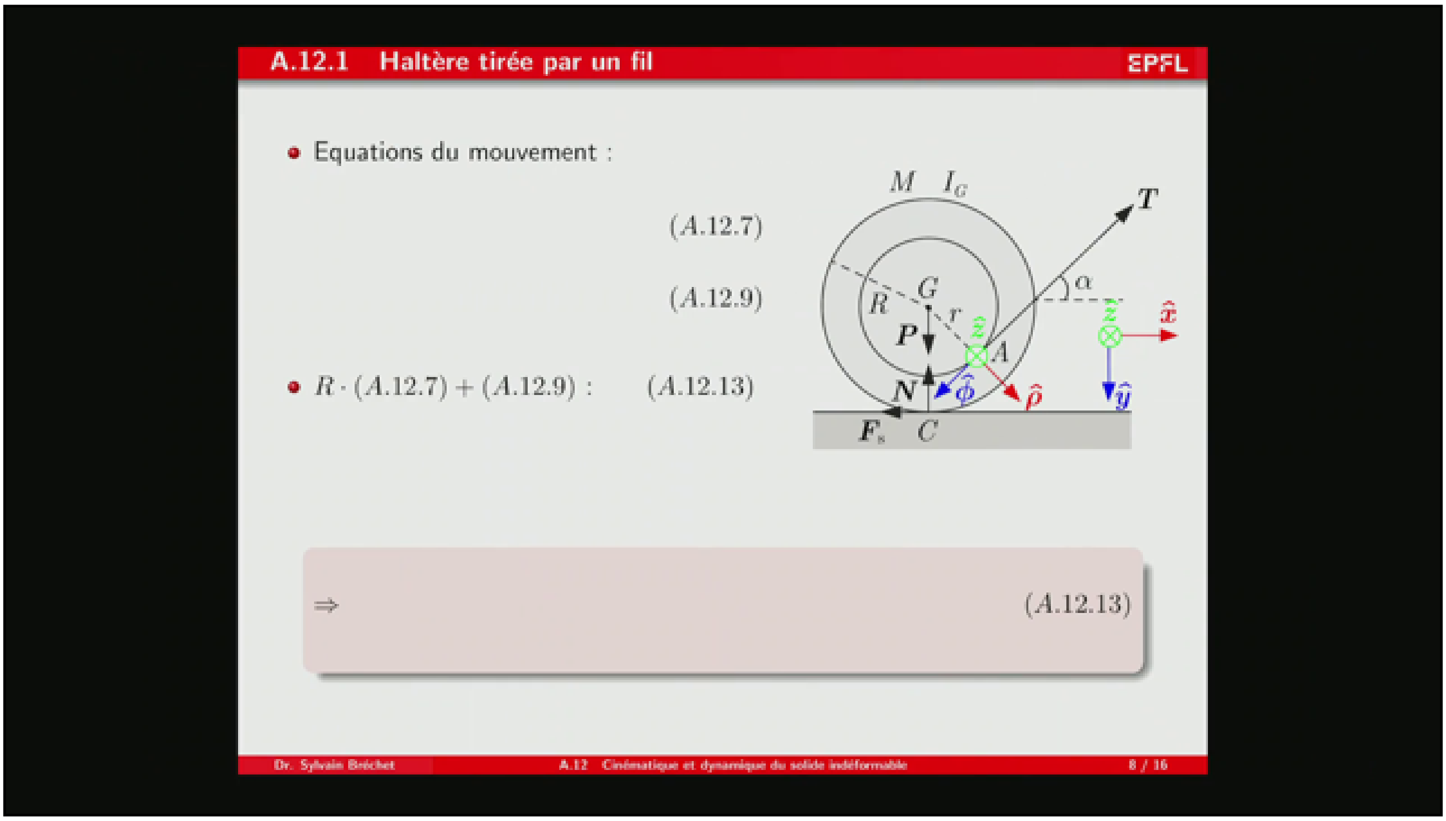
18m 1s



qu'on a envie de faire ? De dériver par rapport au temps. D'accord ? Et c'est ce qu'on va faire. C'est un vecteur CG. C'est un vecteur vertical qui bouge. Mais qui a toujours la même norme et qui est toujours orientée verticalement vers l'eau, c'est le même vecteur. Même lorsque l'altère se déplace. Donc ça dérive tant pour elle nul. D'accord ? Ce qui veut dire que si on dérive par rapport au temps la vitesse du centre de masse, on a l'accélération du centre de masse, la vitesse du point CNU, puisqu'on a un mouvement de roulement sans glissement, on va dériver par rapport au temps omega, c'est ce que c'est. Et c'est tout. Continu du fait, comme je viens de le dire, que le vecteur CG est constant. D'accord ? Le point C et le point G se déplace. Mais si vous avez un vecteur qui a une norme constante, qui est le rayon des disques et qui se déplace vers la droite, qui point toujours vers l'eau, ça reste le même vecteur. D'accord ? Alors maintenant, on va pouvoir tenir compte des informations dont on dispose. L'accélération, oui. J'ai oublié l'omega point. Oui, merci. C'est la dérivé temporelle, absolument. C'est la dérivé temporelle du vecteur vitesse angulaire, c'est le vecteur accélération angulaire. Je l'ai dit, mais j'ai oublié de mettre le point. Donc, le vecteur accélération du centre de masse c'est XG point point fois le vecteur unitaire horizontal X chapeau. Dans le membre de droite, le vecteur accélération angulaire, c'est Phi point point fois Z chapeau. On prend le produit vectorier, le vecteur CG, qui est verticalement orienté vers le haut. Sa norme, c'est le rayon du disque grand air. Y chapeau est orienté vers le bas, c'est donc moins R fois Y chapeau. Ok ? Le produit vectoriel de Z chapeau avec Y chapeau du troisième vecteur, avec le deuxième, ça donne moins le

notes

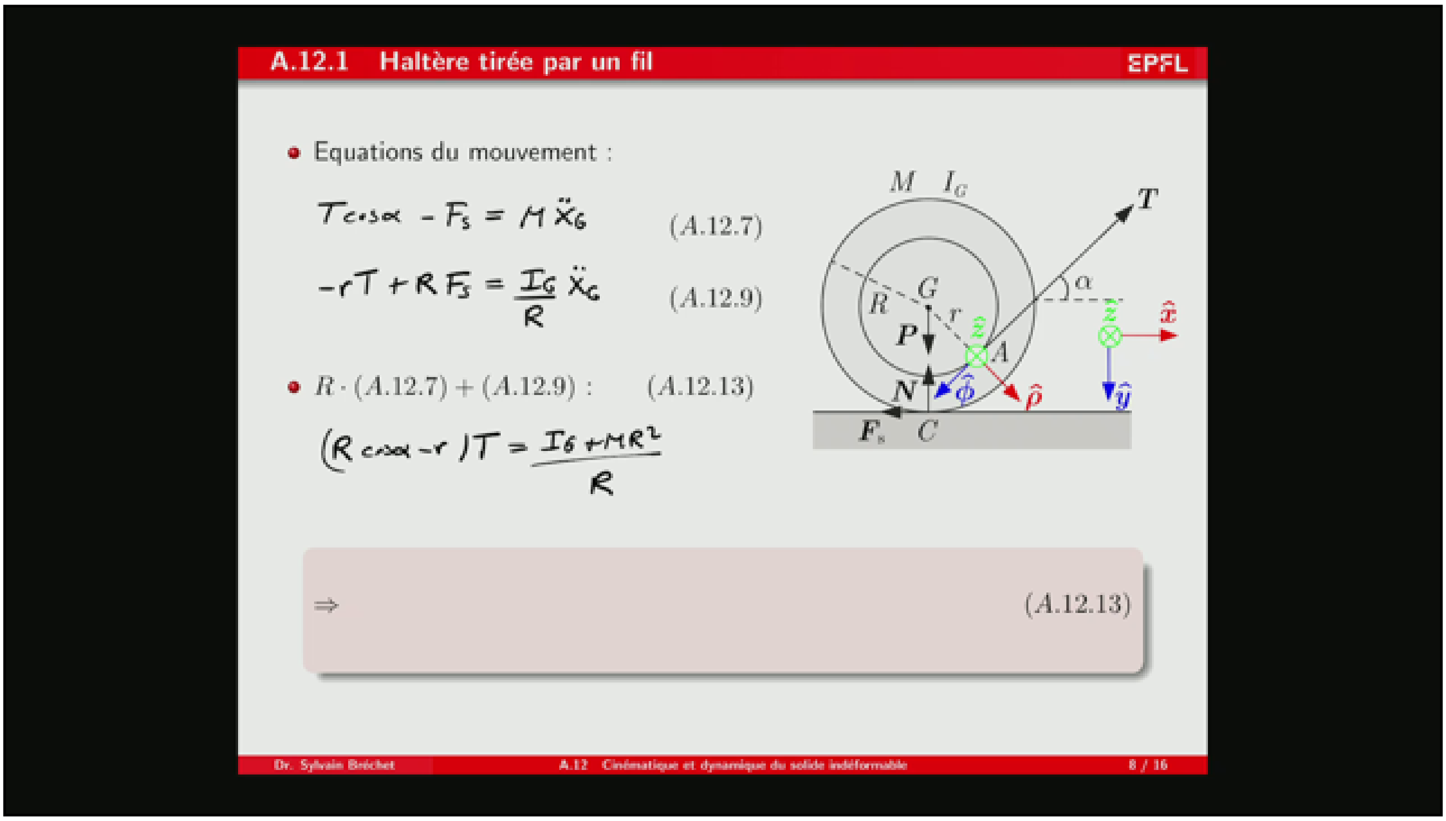
résumé



premier. Il y a un signe moins les signe moins se simplifie. D'accord ? Donc on a une équation, sans surprise, qui va être selon l'axe horizontal. Ok ? Et donc en proche temps, selon cet axe, on arrive à la conclusion assez raisonnable que l'accélération du sans-demas, c'est quoi ? C'est le produit de l'accélération angulaire de rotation du solide indéformable de l'altère, autour du point de contact multiplié par le rayon qui est la distance qui sépare le point de contact du sans-demas. En autre terme, si vous avez un point qui est le sans-demas qui pivote autour du point de contact que la vitesse angulaire de pivotement c'est Phi point point l'accélération angulaire de pivotement c'est Phi point point l'accélération du sans-demas sera évidemment le produit du rayon fois l'accélération angulaire. C'est ce qu'on retrouve ici. D'accord ? Ce qui veut dire que l'accélération angulaire Phi point point, c'est le rapport de l'accélération du sans-demas divisé par le rayon. Bon, alors on peut aller plus loin maintenant

notes

résumé

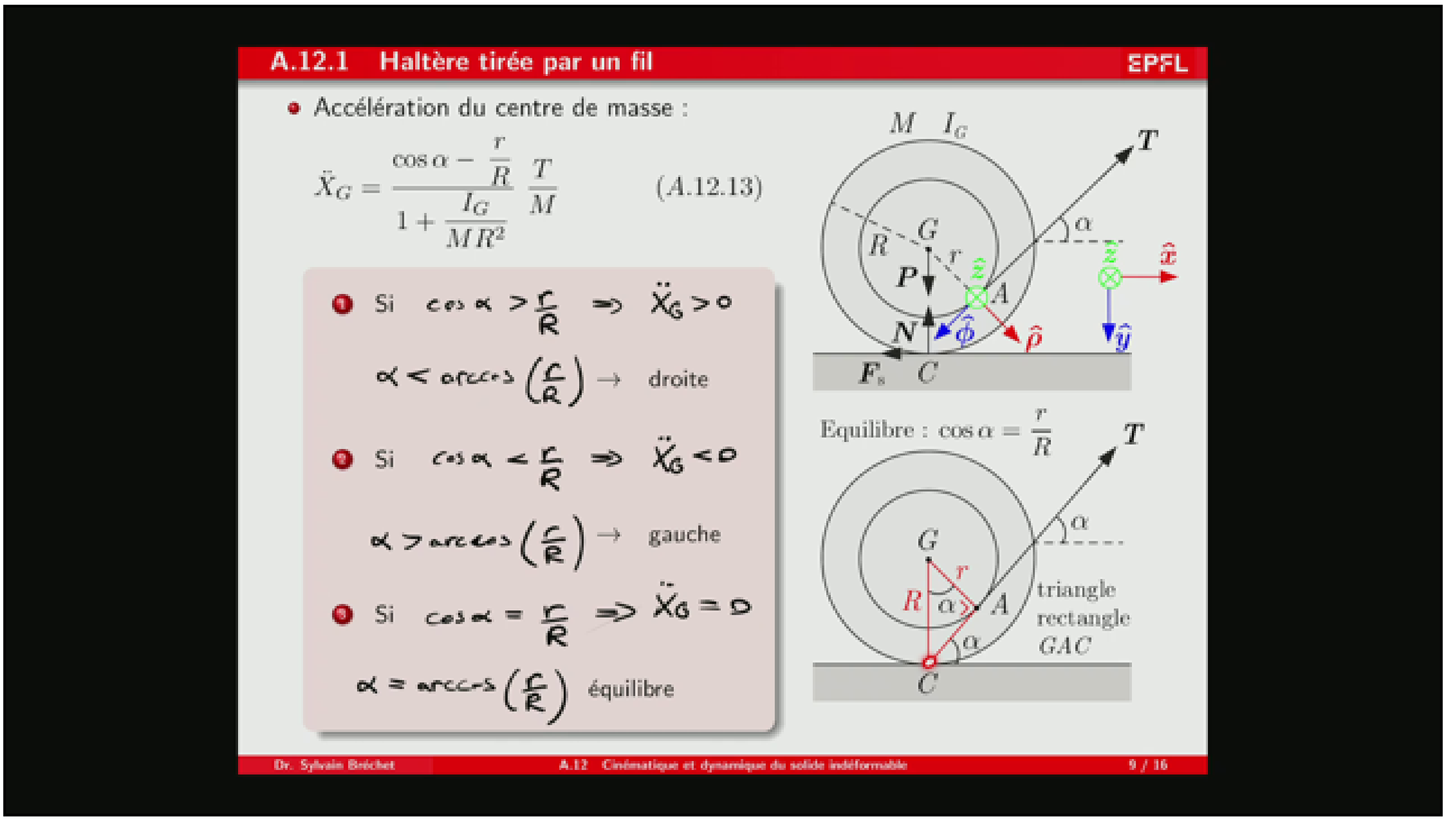


puisqu'on dispose de deux informations essentielles. La première, c'est l'équation du mouvement pour le sans-demas, c'est-à-dire la norme de la force de traction fois le cocinus de l'angle alpha, moins la force de frottement statique en norme qu'il produit de la masse fois la composante d'accélération horizontale du sans-demas. Dans l'autre équation, celle qui donne un mouvement de rotation propre, on va maintenant utiliser la condition de liaison pour remplacer l'accélération angulaire Phi point point par le rapport de l'accélération du sans-demas divisé par le rayon. On va donc se retrouver avec moins petit r, fois grand t plus grand r, fois fs qui est égal au moment d'inertie. Ig divisé par le rayon multiplié par Xg point point. Je répète, Xg point point divisé par r, c'est Phi point point. D'accord ? Alors maintenant on a deux équations qui contiennent Xg point point. Une équation contienne la norme de la force de traction qu'on connaît. Elle contienne autre chose qu'on ne connaît pas qui est la norme de la force de frautement statique. On aimerait s'en débarrasser. Qu'est-ce qu'on va faire ? On va prendre la première équation, qu'on va multiplier par le rayon du disque et on va simplement les sommer, les termes ont disparaître. D'accord ? Alors si on fait ça, on a alors dans le membre de droite r foil cosineus de alpha moins petit r qui multiplie la norme de la force de traction. Et dans le membre de droite, on aura Ig plus MR carré divisé par r le tout

notes

résumé

22m 39s

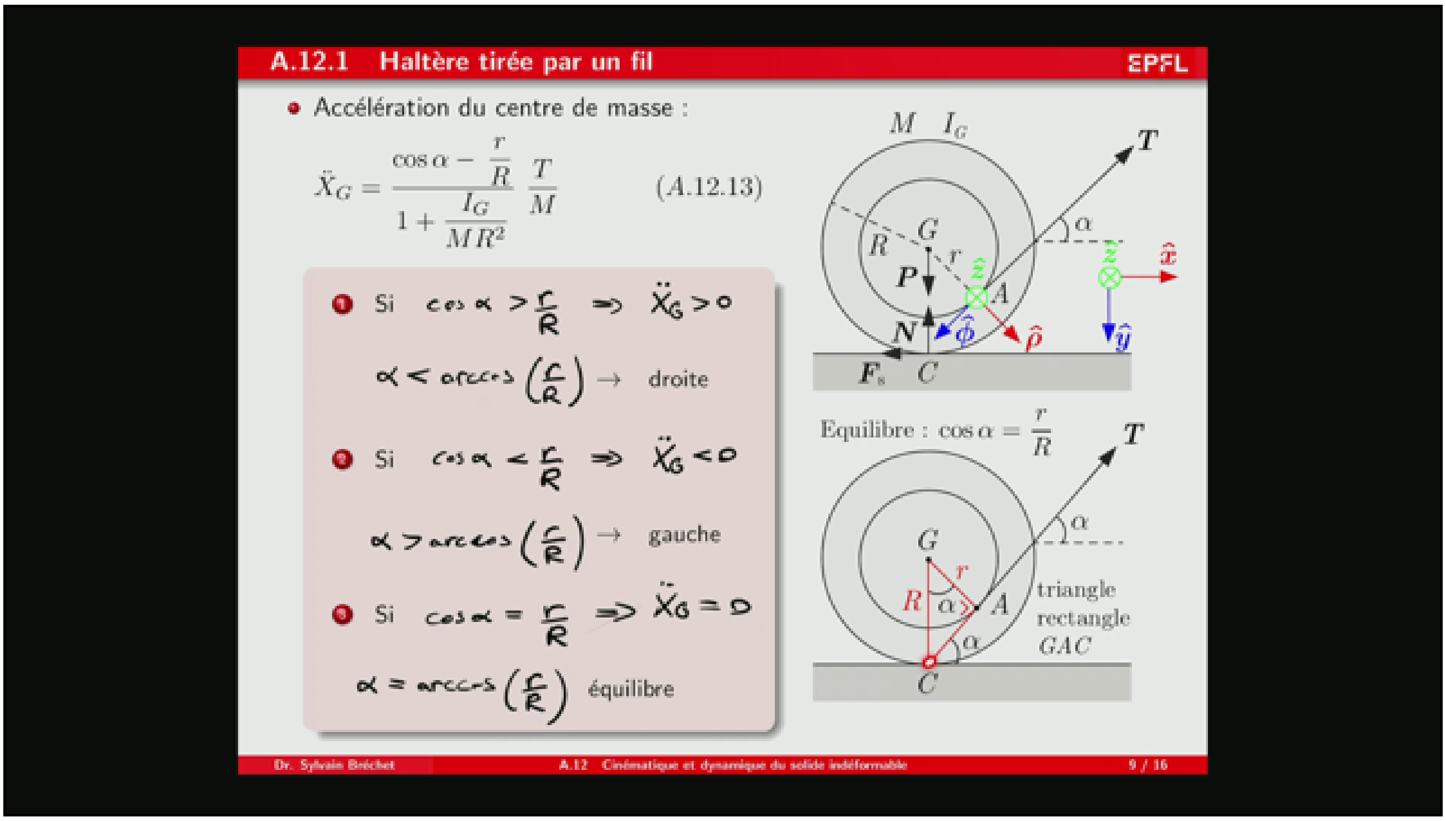


fois Xg point point. On peut donc en déduire l'accélération du centre de masse Xg point point qui va être alors le cosineus de l'angle alpha moins petit r sur grand r divisé par 1 plus le moment d'inertie de l'altère divisé par MR carré le tout fois t'es suremme. C'est juste une remise en formes algebraiques. C'est que la norme de la force de traction t'est positive. Oui ? Ah alors c'est que on aimerait exprimer l'accélération en termes uniquement de la force de traction qu'on connaît. Donc volontairement ce qu'on a fait Martin, c'est qu'on a fait disparaître en multipliant la première équation par le rayon et on la somment avec la deuxième. Donc ces termes disparaissent et c'est pour ça que vous vous retrouvez avec un r cos alpha ici. Parce que le r provient de la première équation. Très bien. Regardez, contemplez cette équation, elle est importante. Au dénominateur, toutes les grandeurs sont positives. 1 plus i,g,i,g est positif, MR carré est positif, c'est positif. La norme de la force de traction, elle est positive. La masse est positive. Qu'en est-il du numérateur ? C'est là que tout se joue. Est-ce qu'il est positif, est-ce qu'il est négatif ? La réponse c'est ça dépend. Ça dépend d'un r cos alpha par rapport au rapport des rayons. Et c'est là que tout va se jouer. C'est pour ça que la bobine peut se dérouler ou qu'elle peut s'enrouler. Alors voyons ça d'un peu plus près. Il y a donc une discussion de cas avec 3 cas possible. Soit, le cos alpha est plus grand que petit r sur grand r. Donc si on a un angle alpha qui est suffisamment grand alors non attendez, j'ai une bêtise. Si on a un cosinus de l'angle alpha qui est suffisamment grand alors l'accélération du centre de masse est positive. Ça veut dire quoi ? Ça veut dire que le

notes

résumé

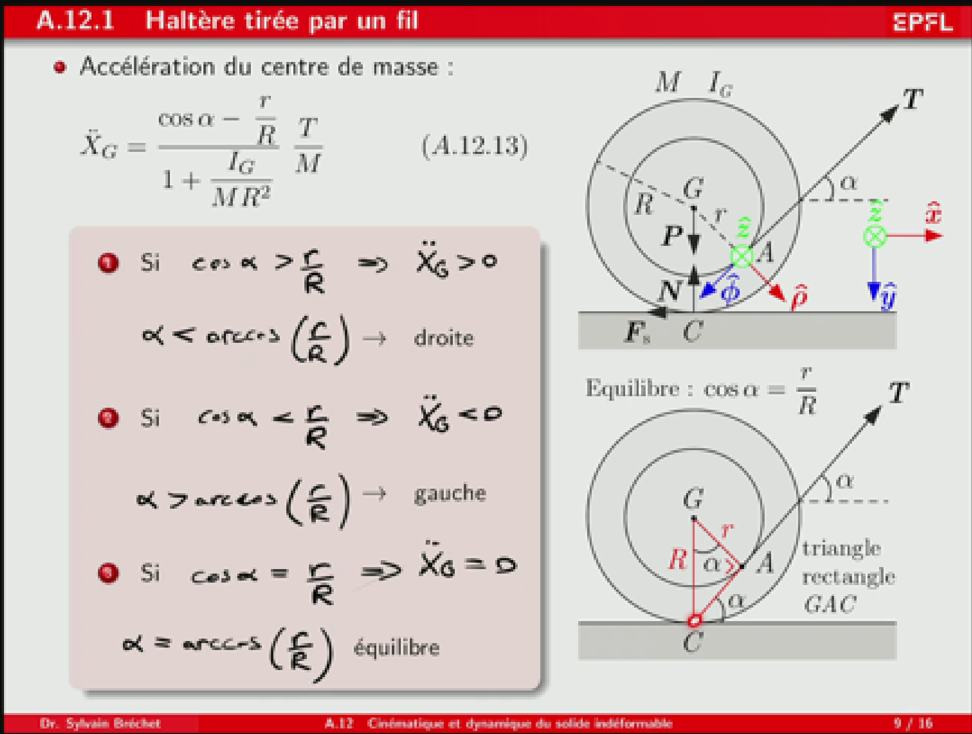
24m 14s



centre de masse se déplace vers la droite et donc que le fil s'enroule. D'accord ? Donc il y a un mouvement de rotation qui se fait dans le sens des aigus d'une montre. D'accord ? Qui provoque un déplacement du centre de masse vers la droite. Le cosinus est une fonction décroissante de l'angle pour un angle aigu. D'accord ? Ce qui signifie que pour que le cosinus soit plus petit que petit r sur grand r il faut alors, plus grand pardon, que petit r sur grand r il faut que l'angle lui-même soit inférieur à l'arc cosinus de petit r sur grand r. Donc si l'angle est suffisamment petit d'accord ? Qu'est ce qu'on constate ? Je vais prendre volontairement un tout petit angle hop ! La bobine s'enroule c'est QFD d'accord ? Alors maintenant, regardons ce qui se passe dans le cas contraire. Dans le cas contraire, lorsque le cosinus de l'angle a alpha est inférieur à petit r sur grand r le numérateur de la fraction est négatif ce qui signifie que l'accélération du centre de masse est négative elle est définie positive vers la droite et donc si l'angle a un mouvement vers la gauche le fil se déroule le mouvement de rotation de l'altère à lieu dans le sens trigonométrique d'accord ? Pour que ceci soit possible comme le cosinus est une fonction décroissante de l'angle il faudra alors que l'angle soit suffisamment grand soit plus grand que l'arc cosinus du rapport de petit r sur grand r Donc maintenant si je prends un angle qui est suffisamment grand bon là, vous voyez, il y a un problème de géométrie mais si l'angle est suffisamment grand voilà, si l'angle est suffisamment grand la bobine va se dérouler si elle se déroule pour un certain angle, quelle s'enroule pour un autre angle ? Il y a un angle limite où il y a rien

notes

résumé



qui se passe, d'accord ? On peut le trouver hein, on peut le trouver à la main là elle se déroule là la tendance a s'enrouler donc l'angle limite il est là il se passe plus rien ok ? Cet angle limite, on le voit tout de suite mathématiquement c'est celui pour lequel il y a plus d'accélération ce qui signifie concrètement que le cosinus de l'angle alpha doit être égal à petit r sur grand r à ce moment là l'accélération du sang de ma cénule d'accord ? Donc à l'équilibre, l'angle alpha va au l'arc cosinus d'un petit r sur grand r alors cet angle est-ce qu'on peut le trouver facilement ? est-ce qu'on peut voir toute la physique en ayant compris ? La réponse est 2 fois oui prenez la situation suivante prenez un triangle rectangle formé de 3 sommets G A S C ok ? bon alors maintenant si vous prenez le cosinus de l'angle alpha au sommet G c'est quoi le rapport du catète adjacent petit r sur l'hypoténus grand r c'est justement le cosinus qui les intéresse le cos de petit r sur grand r le cosinus de l'angle alpha qui donne petit r sur grand r ça c'est la situation d'équilibre ce qui veut dire que si on prend le point C et le point A lorsque le fil est dans le prolongement du point de contact entre l'altère et le sol on est à l'équilibre il ne se passe plus rien est-ce qu'on arrive à comprendre ça avec nos doigts ? la réponse est oui pourquoi ? si au lieu d'appliquer le théorème du centre de masse et le théorème du moment cinétique au niveau du centre de masse on appliquait uniquement le théorème du moment cinétique au niveau du point de contact on a la réponse à la question et je vais vous le montrer partez du point C

notes

résumé

calculons maintenant les moments de force liés à la force de réaction normale au poids et à la force de frottement statique le poids il est exercé en G vers le bas il est collinère au vecteur CG le moment de force du poids évalué en C est nul la force de réaction normale N et la force de frottement statique s'appliquent en C les moments de ces deux forces évaluées en C sont nuls qu'en est-il maintenant du moment de force lié à la force de traction ? c'est le pro du vectoriel pour asser du vector CA avec la force T et donc si le fil est dans le prolongement du poids donc contact ce moment de force est lui aussi nul la somme des moments est nul on est à l'équilibre alors maintenant que se passe-t-il lorsque le fil a un an qui est supérieur à cet anc d'équilibre on sait très bien que dans ce cas-là et on l'a vu on l'a démontré d'accord, l'altère va se dérouler elle va se déplacer vers la gauche d'érifions si on incline la tension de cette manière qu'on prend le pro du vectoriel du vector CA avec la tension T ben était l'index selon CA le majeur solonté qui est un peu décalé vers la gauche le résultat, le pro du vectoriel donne un moment de force qui sort du plan qui provoque une rotation dans le sens trigonométrique vers la gauche si maintenant le fil qui était orienté ici vers la droite ça serait exactement le contraire le produit vectoriel de CA avec la tension T nous donne un moment de force qui rentre dans le plan c'est-à-dire qu'on a une rotation qui se fait vers la droite le fil s'enroule d'accord ? souvent quand vous avez un problème de physique il y a une logique derrière la logique c'est que ici l'altère pivote autour du point de

notes

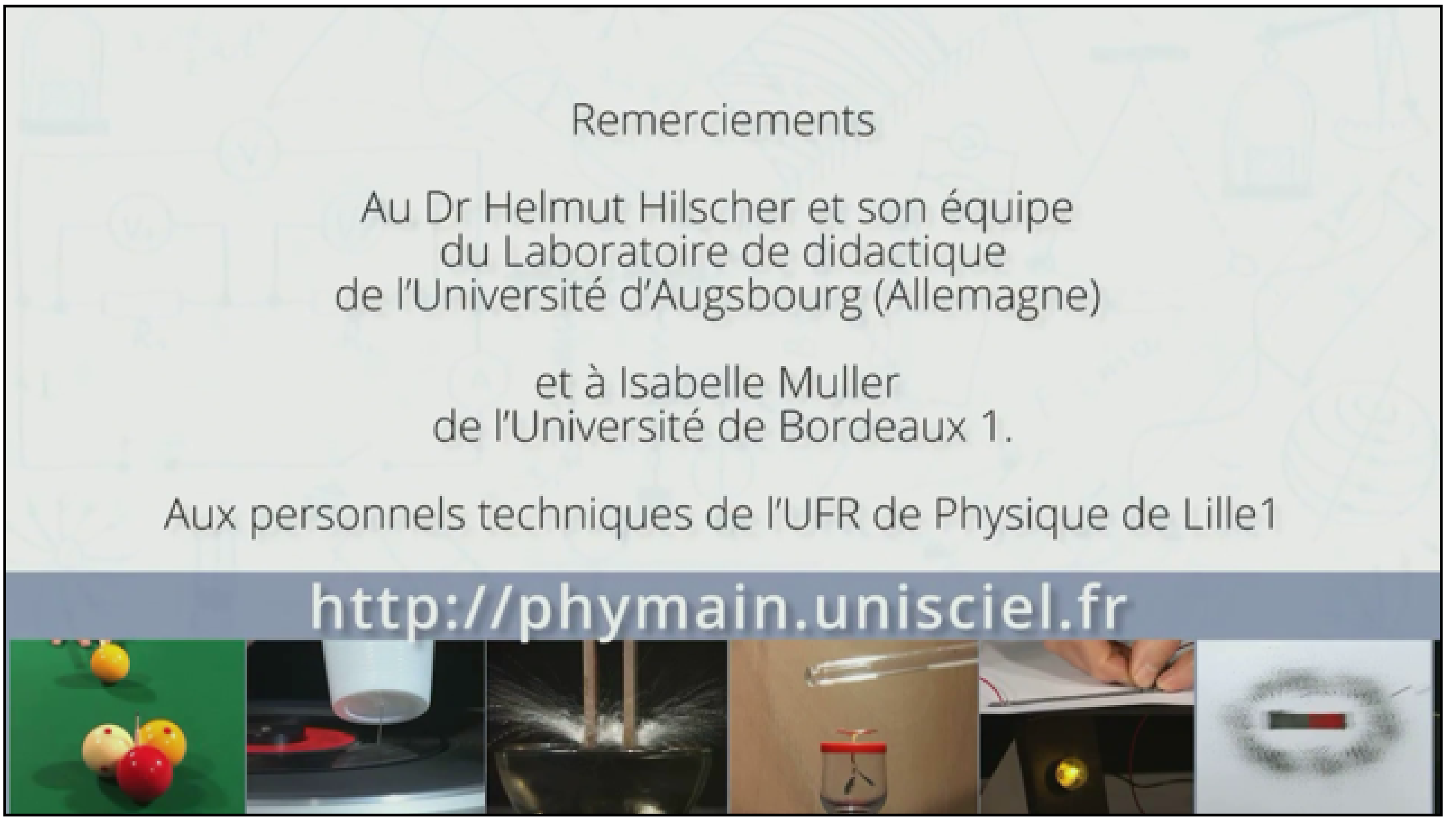
résumé

30m 13s

contact c'est-à-dire en appliquant le bon théorème qui décrit la rotation autour de ce point de contact on arrive tout de suite à la solution donc on peut le faire passant par les deux théorèmes appliqués au centre de masse qu'on a fait mais c'est plus intelligent de le faire en passant par le point de contact d'accord ? alors pour vous démontrer ceci j'ai une petite vidéo qui illustre

notes

résumé

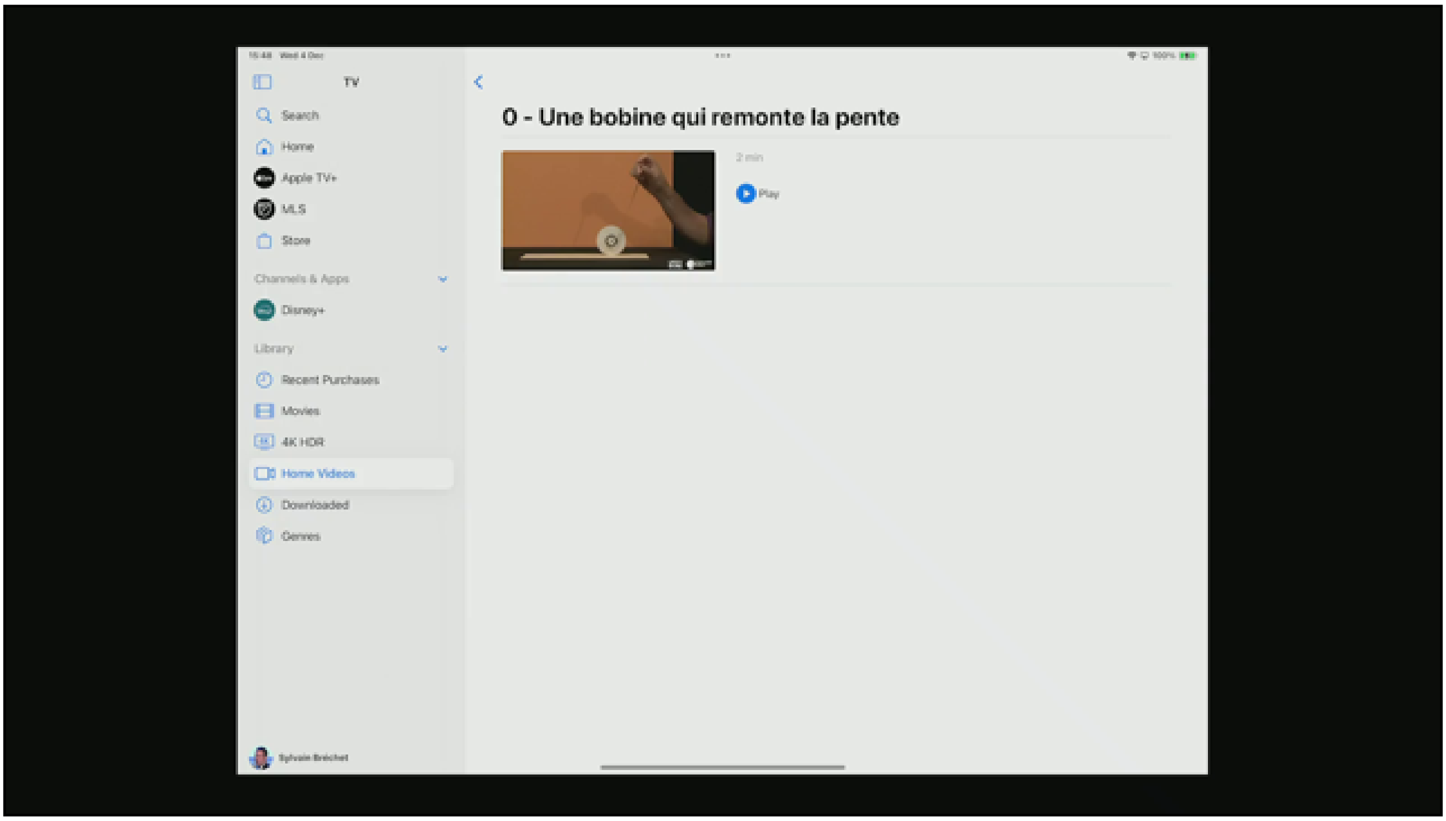


ceci avec une ancienne bande disons de film VHS d'accord ? qui a été utilisé pour faire de la physique on retrouve le même comportement si la bobine est placée sur un plan horizontal si on tire sur le ruban la bobine se déplace toujours vers la main et le ruban s'enroule ou se déroule selon qu'il arrive en dessous ou au-dessus de la gorge tout en tirant sur le ruban modifions son orientation pour que la bobine ne roule ni dans un sens ni dans l'autre on constate que cette position est celle pour laquelle le prolongement du ruban passe par le point de contact de la bobine avec le plan le moment des trois forces appliquées poids de la bobine force de frottement et traction du ruban par rapport à ce point est nul et la bobine reste en équilibre

notes

résumé

32m 30s

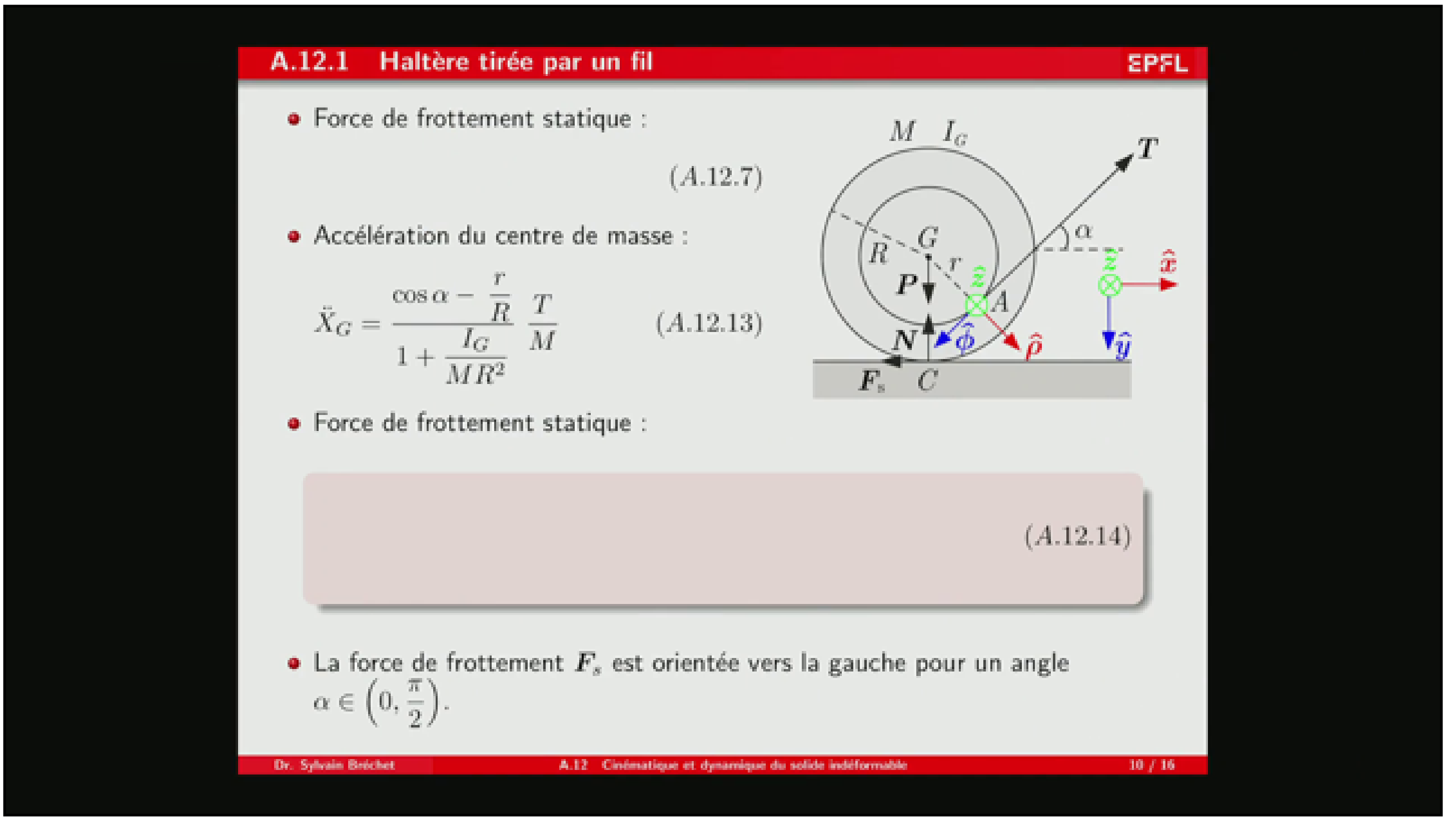


il y a une question

notes

résumé

33m 37s

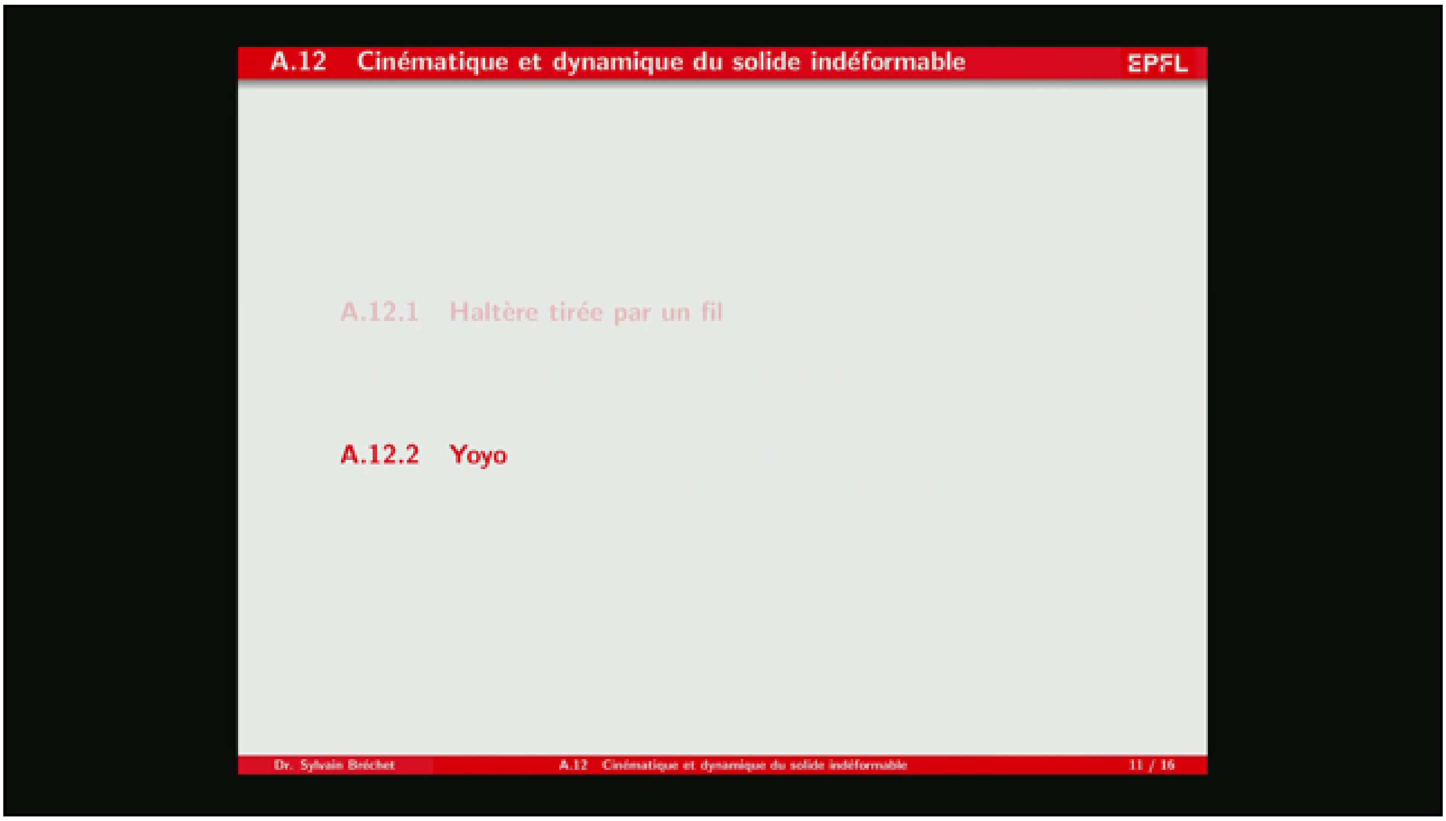


à laquelle on n'a pas encore répondu c'est quelle est l'orientation de la force de frottement statique qui permet le roulement sanglissement

notes

résumé

33m 42s

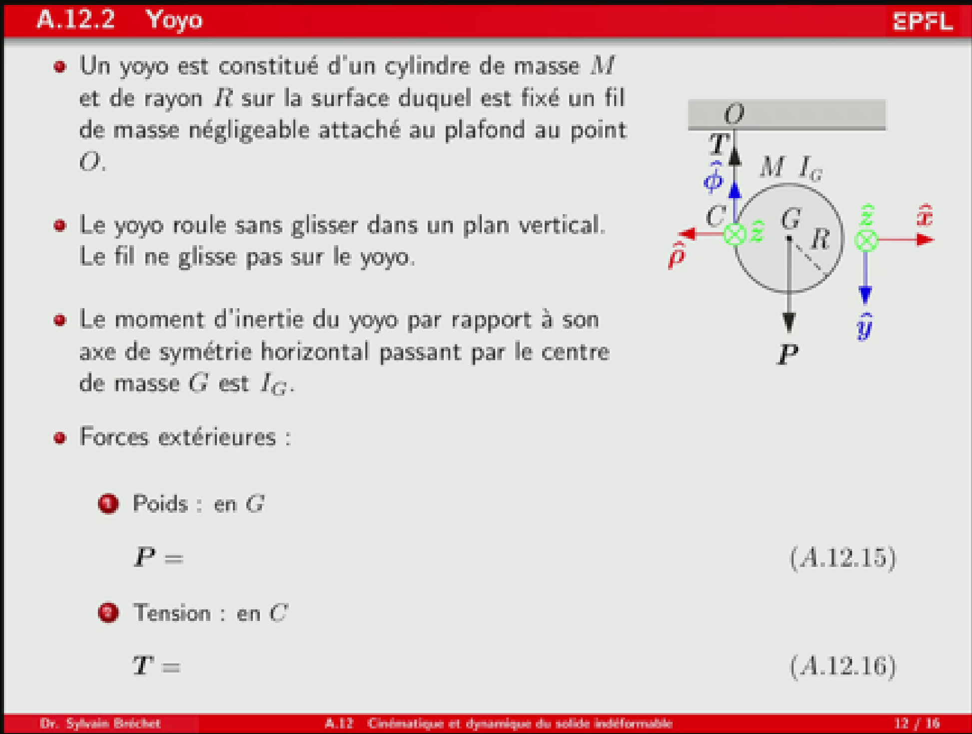


c'est franchement contraintuitif la première fois que j'ai fait le calcul je me suis demandé si je n'avais pas fait une erreur et c'est vraiment correct elle est toujours orientée dans le même sens sauf que son intensité va être plus grande dans un casque dans l'autre alors comment est-ce qu'on peut le montrer on prend l'équation du mouvement du centre de masse et on en tire Fs qu'on peut écrire comme la norme de la force de traction dans le fil fois le cosif de l'angle alpha moins le produit de la masse fois l'accélération du centre de masse cette accélération du centre de masse on vient de la déterminer on peut donc la prendre et on va voir la situation précédente on réarrange nos termes et on trouve au final que la force de frottement statique a une norme qui est Ig sur MR2 fois le cosinus de l'angle alpha plus petit air sur grand air le tout divisé par évidemment le même dénumiateur qui est 1 plus Ig sur MR2 qui multiplie la norme de la force de traction T ici c'est toujours positif et donc que la bobine s'enroule ou qu'elle se déroule la force de frottement statique dans ce cas là est toujours orientée dans le sens opposé au fil d'accord ? seulement il y a un cas de figure où elle va être plus grande que l'autre d'accord ? en norme mais elle va toujours s'opposer au fil ce qui est un peu contre-intuitif parce qu'on s'attendrait à ce qu'elle soit orientée une fois dans un sens une fois dans un autre qui s'enroule ou qu'elle se déroule voilà donc ça c'était le problème le plus complexe mais le plus intéressant

notes

résumé

33m 51s

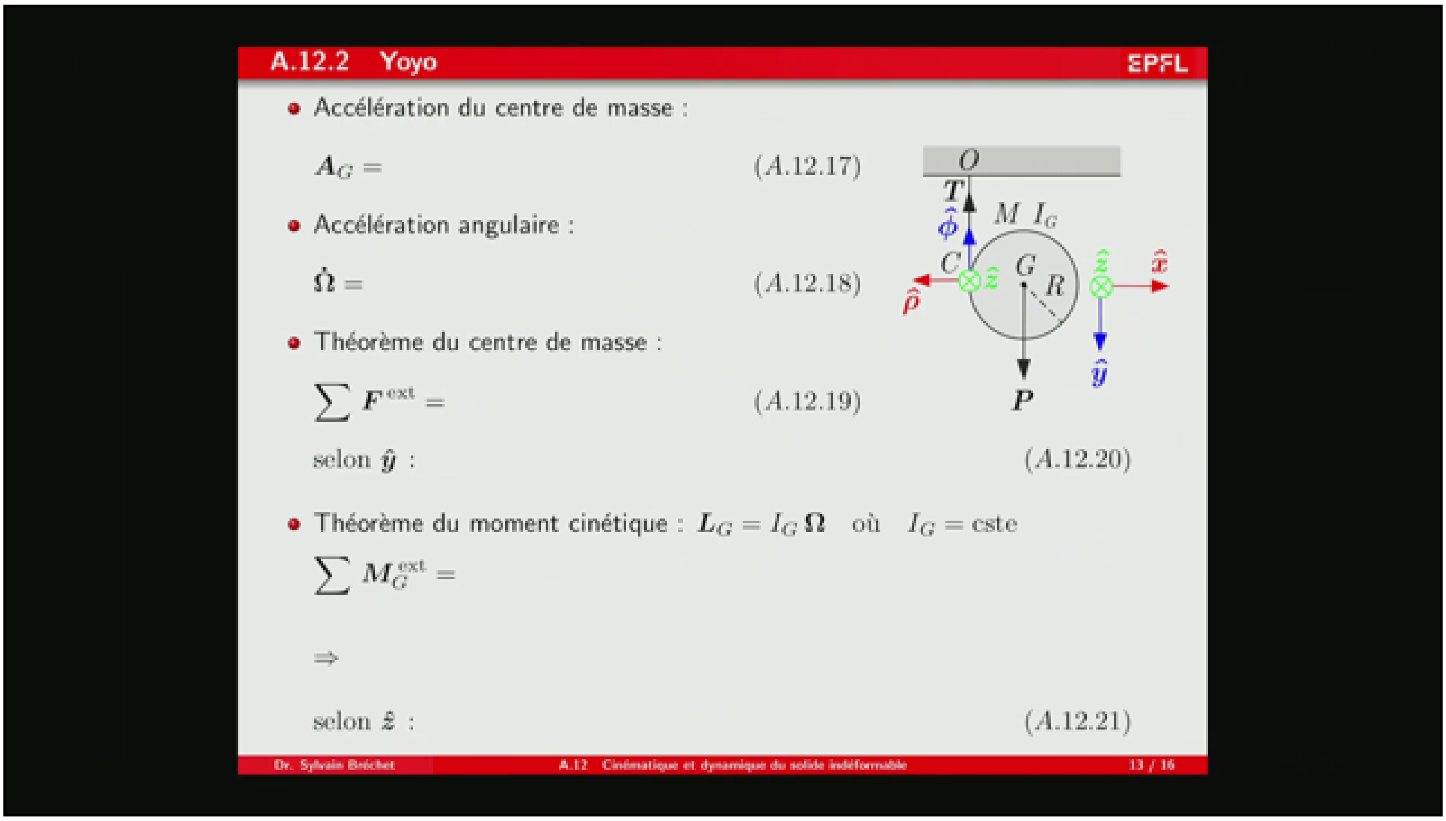


passons à un problème un peu rétractif maintenant qui est le mouvement d'un yoyo d'accord ? voilà le yoyo on peut le modéliser comme un cylindre autour duquel on a attaché un fil et l'extrémité de ce fil on la place ici on la fixe au plafond à l'origine O on introduit ici aussi deux repères un repère cylindrique fixé au point de contact entre le cylindre et le fil et puis un repère cartésien ces deux repères partagent le même vecteur unitaire qui rentre dans le plan qui est orthogonal au plan de rotation c'est en l'axe de rotation

notes

résumé

35m 32s

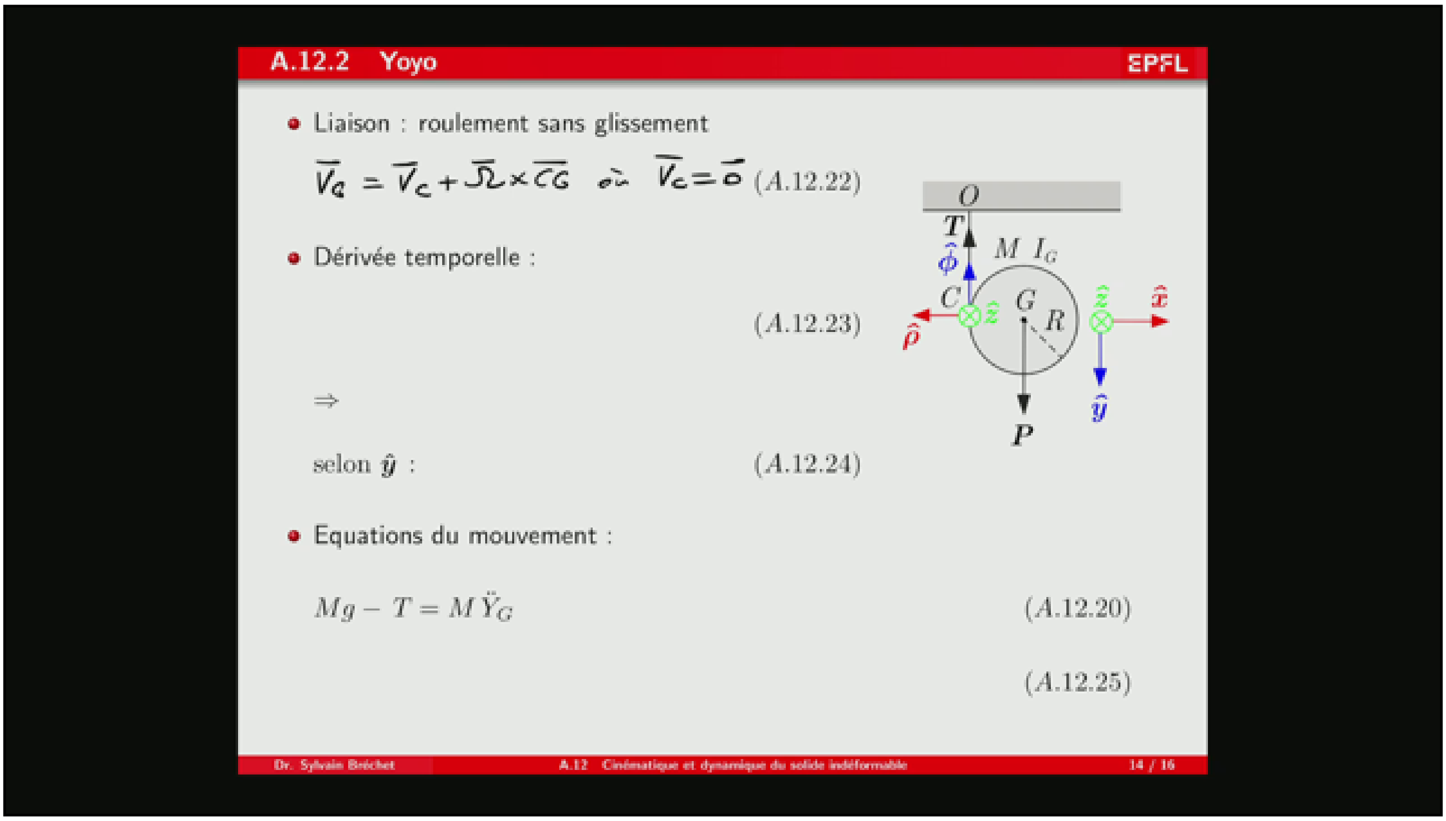


qui est le vecteur Z chapeau d'accord ? on a un vecteur orienté vers l'extérieur un vecteur phi chapeau orienté dans le sens des aigus d'une montre et alors X chapeau sera orienté vers la droite Y chapeau vers le bas le moment d'inertie du yoyo par rapport à l'axe qui passe par 60 de masse c'est IG bon alors quelles sont les forces extérieures qui s'exercent sur le yoyo ? la première c'est le poids le poids c'est le produit de la masse foilchant gravitationnel c'est donc MG multiplié par le vecteur unitaire orienté vers le bas qui est Y chapeau la tension dans le fil est orientée vers l'origine c'est moité foil Y chapeau alors

notes

résumé

36m 13s

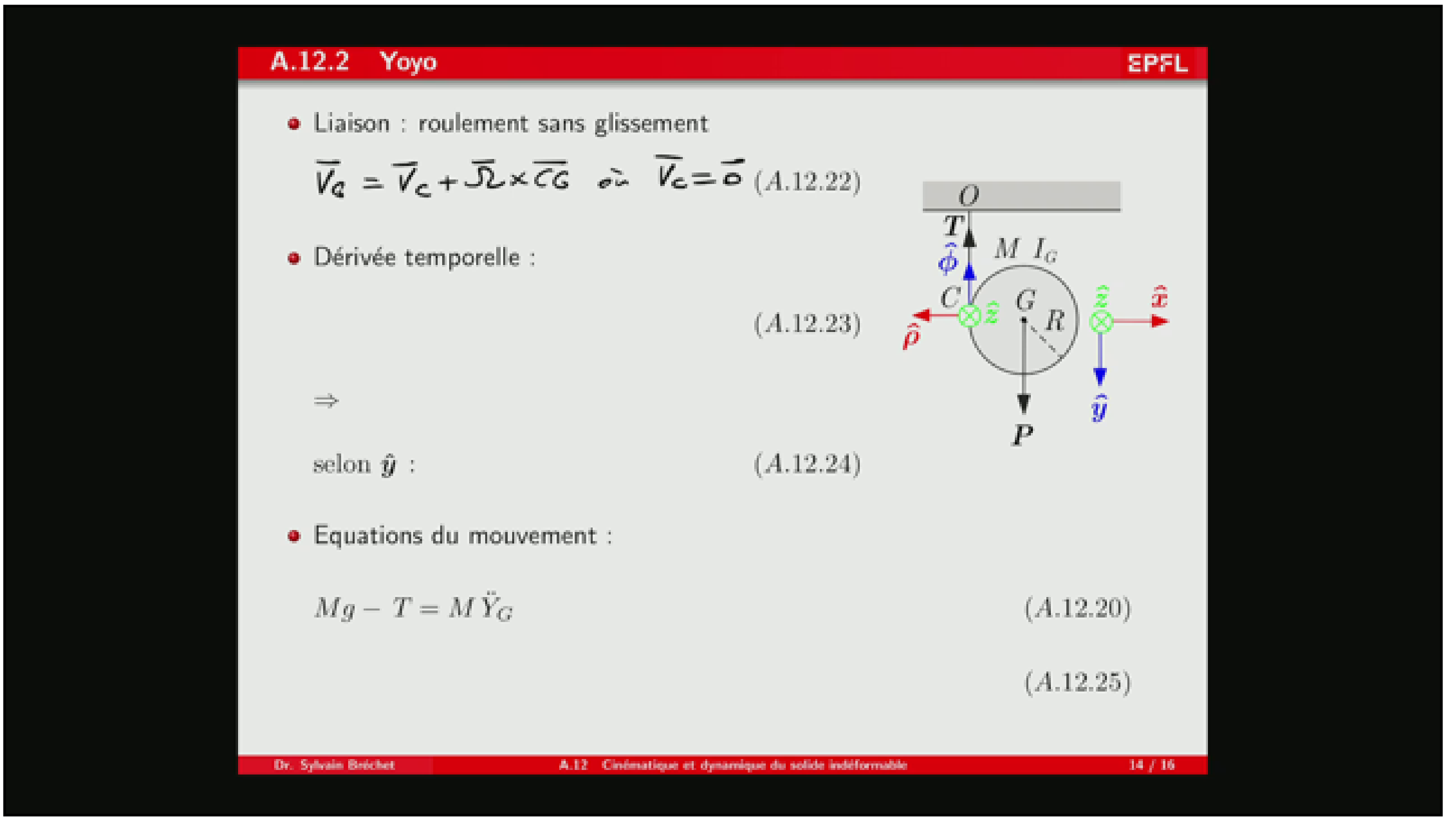


le vecteur accélération du sang de masse il est bien évidemment orienté verticalement vers le bas d'accord ? donc c'est YG poing poing foil vecteur unitaire Y chapeau pour le vecteur vitesse angulaire on a choisi un vecteur unitaire tangent fi chapeau qui est orienté dans le sens horaire donc il faut s'y tenir pour le vecteur vitesse angulaire on fait tourner la paume de la main droite dans le sens horaire et on voit que le pouce rentre dans le plan d'accord ? le pouce c'est l'orientation de omega omega point à la même orientation donc on va avoir fi point point foil vecteur unitaire qui rentre dans le plan comme le pouce qui est Z chapeau d'accord ? le théorème du sang de masse, il est plus simple que dans le cas précédent c'est la somme du poids plus la tension dans le fil qui est le produit de la masse fois l'accélération du sang de masse on projette cette équation selon l'axe du mouvement qui est l'axe vertical et on se retrouve avec pour le poids une contribution positive vers le bas qui est MG, pour la tension une contribution négative qui est moitée et dans le monde de droite on a le produit de la masse pour la fois la composante d'accélération vertical du sang de masse du y y g point point bon on doit maintenant appliquer le théorème du moment cinétique alors la rotation se fait autour de l'axe horizontal de l'axe de symétrie du y y qui est un axe principal d'inertie ce qui veut dire qu'on a une seule composante non nulle de omega qui est selon cette axe et que LG va forcément être collinère à omega la constante de proportionnalité étant le moment d'inertie comme dans le problème précédent écrivant donc le théorème du moment cinétique la somme des moments de force extérieures évaluée par rapport au sang de masse

notes

résumé

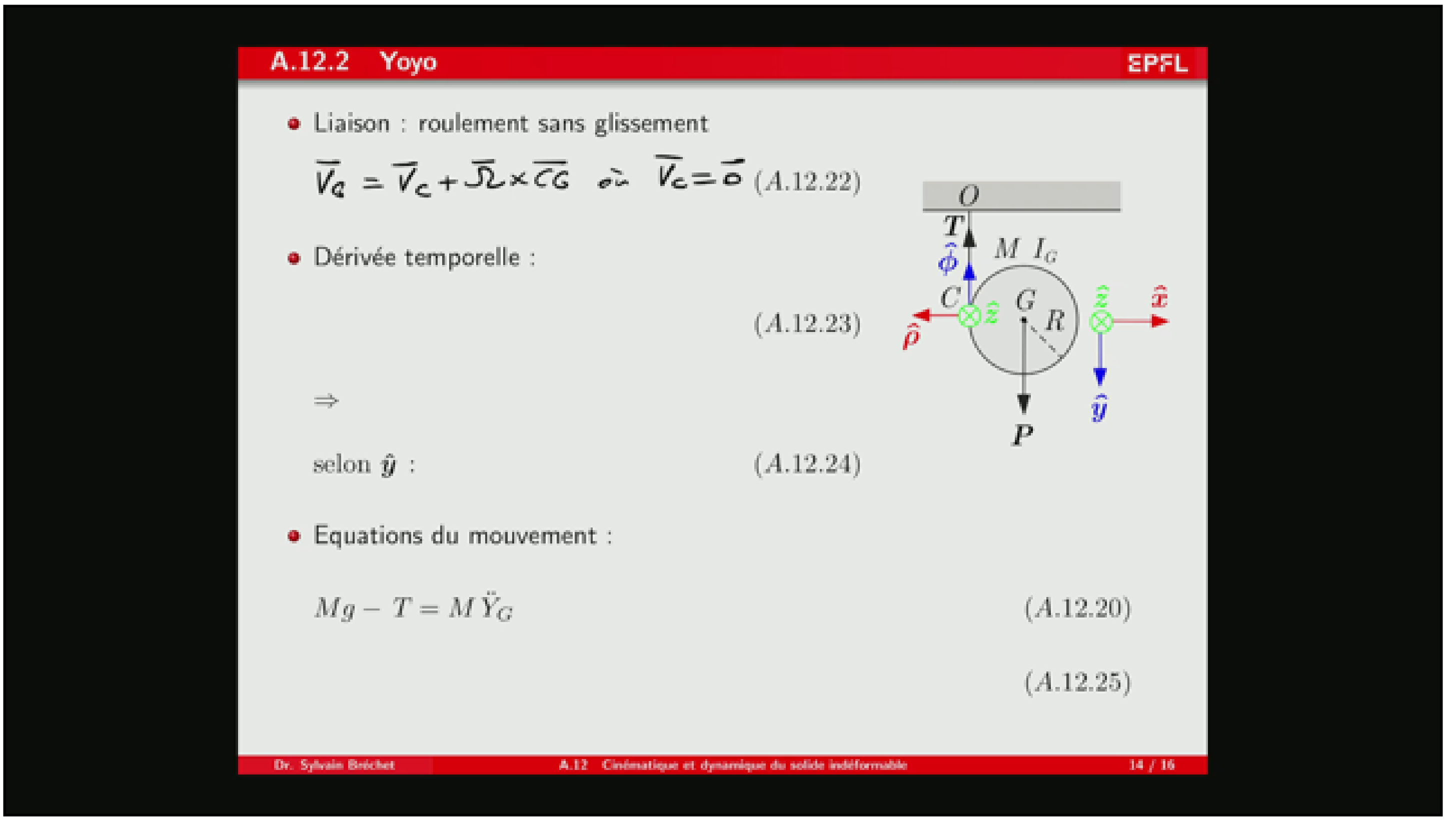
36m 57s



c'est celui du poids d'une part celui de la tension d'autre part donc on prend le vecteur position relative du point d'application du poids qui est le sang de masse c'est encore notre fameux vecteur GG dont la norme est nulle produit vectoriel avec le poids il ne se passe strictement rien ça donne zéro on a un deuxième moment de force celui de la tension qui sera le produit vectoriel du vecteur point d'application de la tension dans le fil qui est le point C celui de l'origine du sang de masse c'est le vecteur GC produit vectoriel avec la tension dans le fil et ceci est égal au moment d'inertie IG qui multiplie le vecteur accélération angulaire omega point bon alors cette théorème du moment scientifique on va maintenant le projeter selon l'axe horizontal mais avant de le faire il faut déjà qu'on écrive en composante les différents vecteurs qui interviennent alors commençons par le vecteur GC le vecteur GC c'est un vecteur dont la norme correspond au rayon du guillot qui est grand air il est orienté vers la gauche X chapeau est orienté vers la droite c'est donc moins air fois X chapeau on prend le produit vectoriel avec la tension qui est verticalement orienté vers l'eau c'est donc moins t fois Y chapeau et puis dans le monde de droite on a le moment d'inertie IG, fois l'accélération angulaire omega point qui est phi point point fois Z chapeau le produit vectoriel de X chapeau et de Y chapeau du premier et du deuxième vecteur du repère ça donne le troisième Z chapeau, les signe moins se simplifient il va nous rester dans le membre de gauche RT fois Z chapeau et donc si on projette selon Z chapeau il nous reste RT dans le membre de droite on aura IG fois phi point point donc on a, comme dans le problème précédent de l'altern,

notes

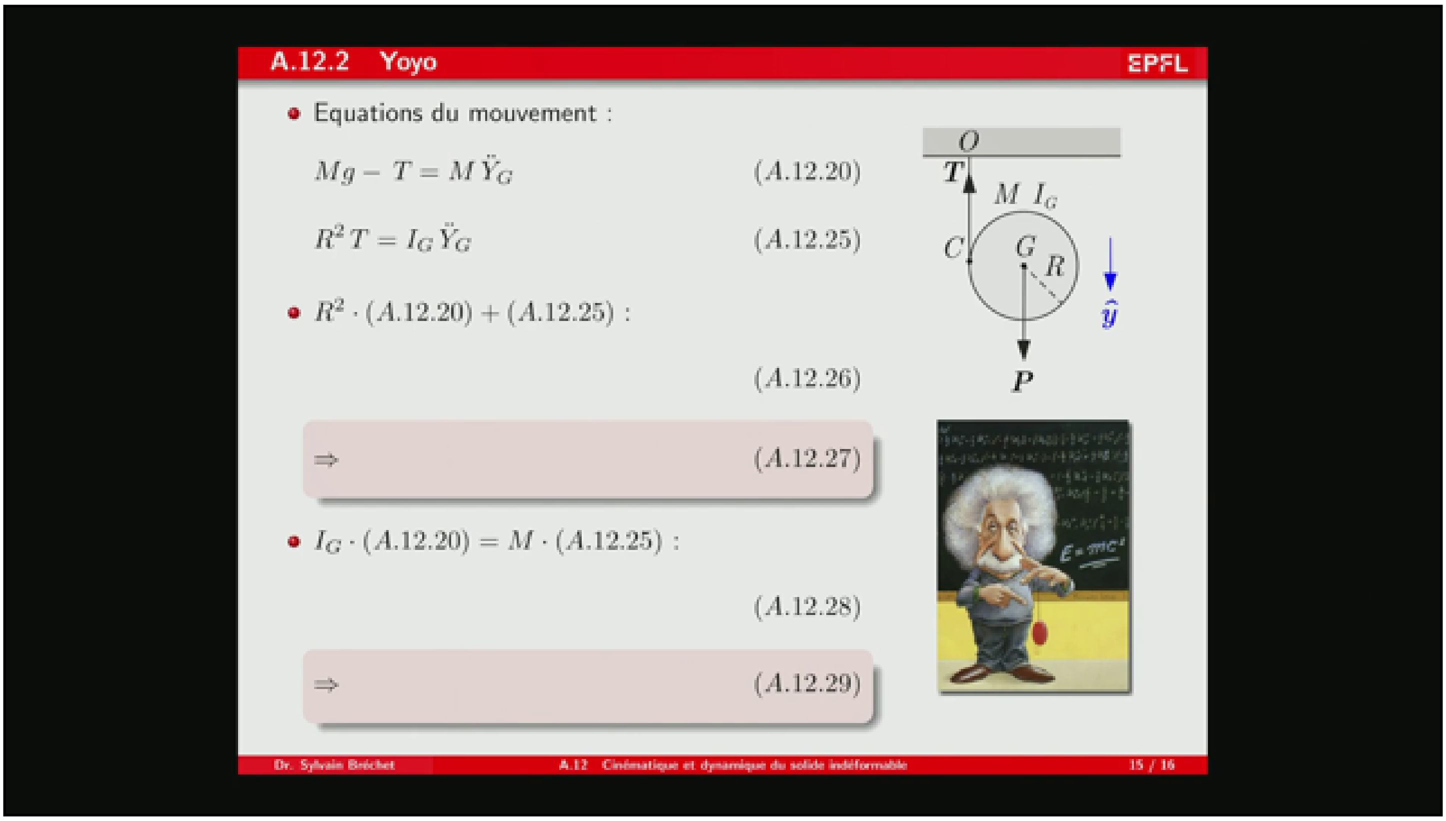
résumé



une équation qui nous décrit le mouvement vertical du sainte-demase du yoyo une autre équation qui décrit le mouvement de la direction propre du yoyo autour du sainte-demase d'accord ? il faut qu'on les lie l'une à l'autre comment faire ? on a besoin de savoir ce qui se passe au niveau du point de contact entre le fil et le yoyo le yoyo il se déroule autour du fil à chaque instant le point de contact entre le yoyo et le fil est immobile c'est à chaque instant un nouveau point mais à chaque instant il est immobile à chaque instant le yoyo pivote donc autour de ce point C donc on va pouvoir utiliser la condition de roulement sanguissement donc la vitesse du sainte-demase c'est la vitesse du point de contact plus le produit vectoriel de omega avec CG ou ici la vitesse du point de contact est nulle étant donné qu'on a un roulement sanguissement alors maintenant ce qu'on cherche à trouver ce qu'on cherche donc à trouver c'est l'accélération du sainte-demase donc pour trouver l'accélération du sainte-demase ce qu'on va faire

notes

résumé



c'est dériver la relation précédente d'accord ? quand il y aura suffisamment de silence pour pouvoir le faire donc je disais ce qu'on veut chercher maintenant c'est l'accélération du sainte-demase donc on va dériver par rapport au temps la relation précédente compte tenu du fait que la vitesse du point de contact est nulle donc l'accélération du sainte-demase qui est la dérivée temporelle la vitesse du sainte-demase ça va être la dérivée temporelle de omega qui est l'accélération angulaire avec le vector CG qui comme dans l'exemple précédent est constant puisque CG est toujours horizontal donc il faut être orienté vers la droite quand ? l'accélération du sainte-demase c'est YG point point fois le vector unitaire Y chapeau ceci est égal au produit vectoriel de omega point qui est phi point point fois Z chapeau produit vectoriel avec CG qui est R fois X chapeau bon le produit vectoriel de Z chapeau avec X chapeau donc du troisième vector avec le premier ça donne le deuxième ça donne Y chapeau donc on a une équation qui est entièrement orientée selon l'axe vertical vers le bas c'est assez logique donc on trouve que YG point point c'est R phi point point on est en train d'affirmer que l'accélération du sainte-demase on peut l'obtenir à l'aide de l'accélération angulaire de rotation du yoyo comment ? on la multiplie en par le rayon étant donné qu'à chaque instant peut considérer que le yoyo pivote autour du point C donc si vous avez l'accélération angulaire qui décrit pivotement vous la multipliez par le rayon vous avez l'accélération du sainte-demase d'accord ? donc on va reprendre la première équation MGmoit T qui est YG point point l'équation du mouvement vertical du sainte-demase on va prendre maintenant l'équation qui décrit le mouvement de rotation et tout de suite on va la multiplier par R on avait à gauche RT on aura R carré T à droite

notes

résumé

42m 13s

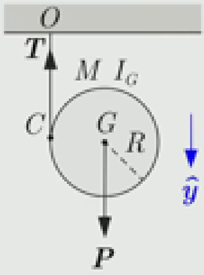
A.12.2 Yoyo

EPFL

- Equations du mouvement :

$$Mg - T = M\ddot{Y}_G \qquad (A.12.20)$$

$$R^2 T = I_G \ddot{Y}_G \qquad (A.12.25)$$



- $R^2 \cdot (A.12.20) + (A.12.25)$:

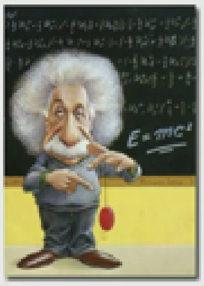
$$(A.12.26)$$

$$\Rightarrow \qquad (A.12.27)$$

- $I_G \cdot (A.12.20) = M \cdot (A.12.25)$:

$$(A.12.28)$$

$$\Rightarrow \qquad (A.12.29)$$

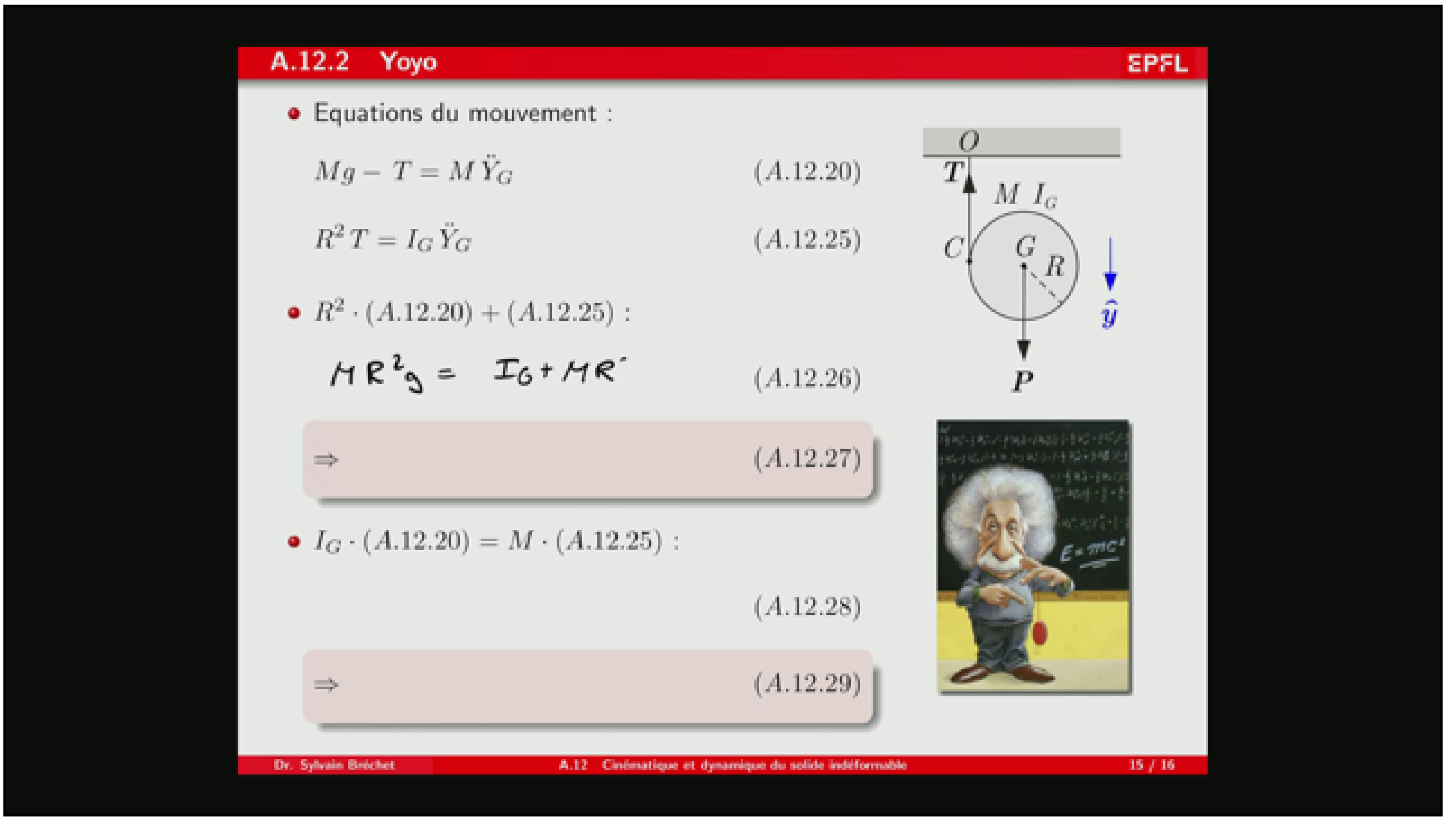


Dr. Sylvain Bréchet — A.12 Cinématique et dynamique du solide indéformable — 15 / 16

on avait YG FI point point FI point point qui est YG point point sur R on multiplie par le rayon il nous reste un YG point point ce qui nous intéresse dans ce problème c'est de trouver l'accélération du sainte-demase d'accord ?

notes

résumé

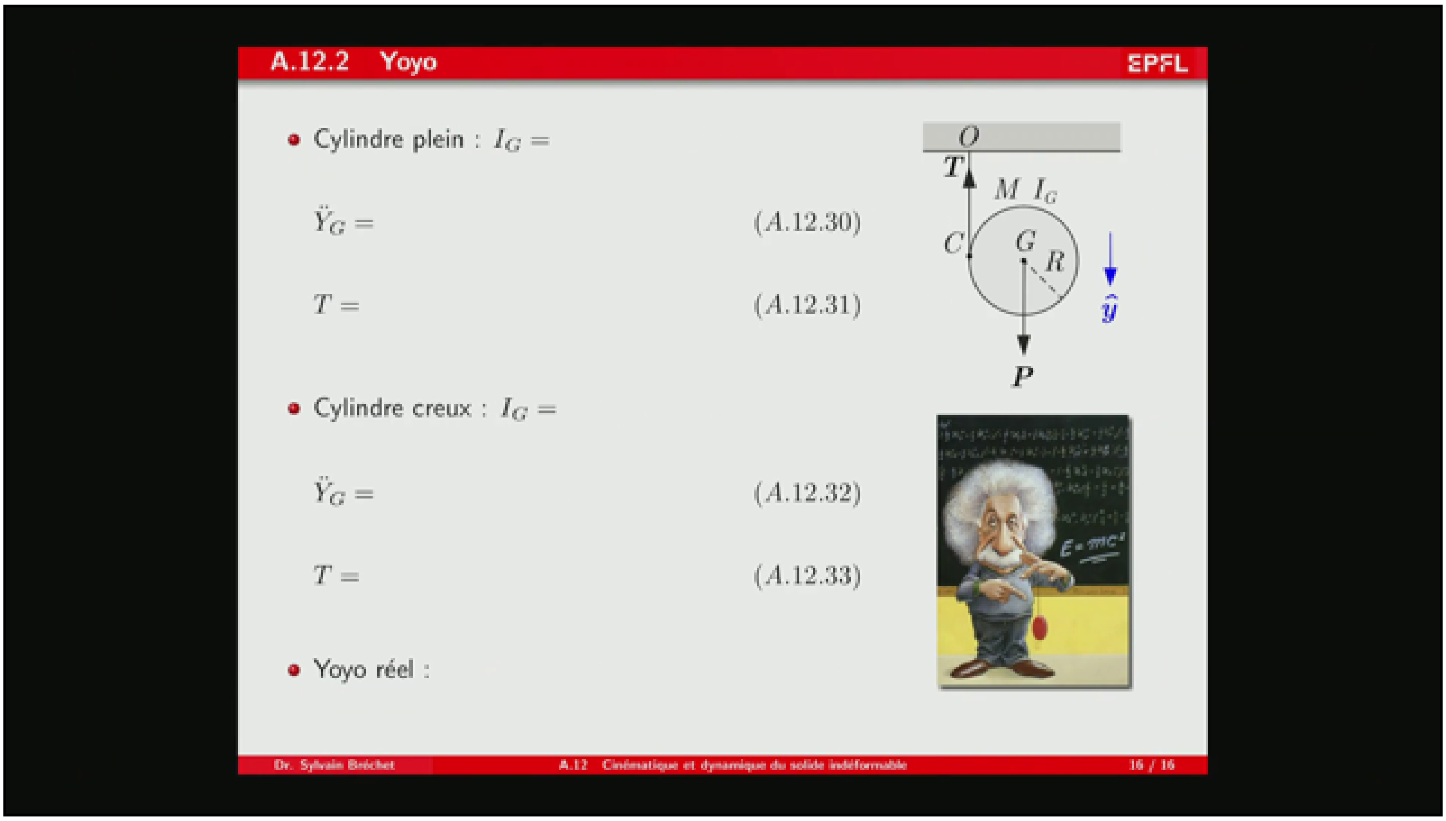


donc comment faire ? on va simplement multiplier la première équation par R carré d'accord ? l'ajouter à la deuxième pour faire disparaître la tension et on trouve alors MR carré G est égal au moment d'inertie IG plus MR carré

notes

résumé

44m 52s

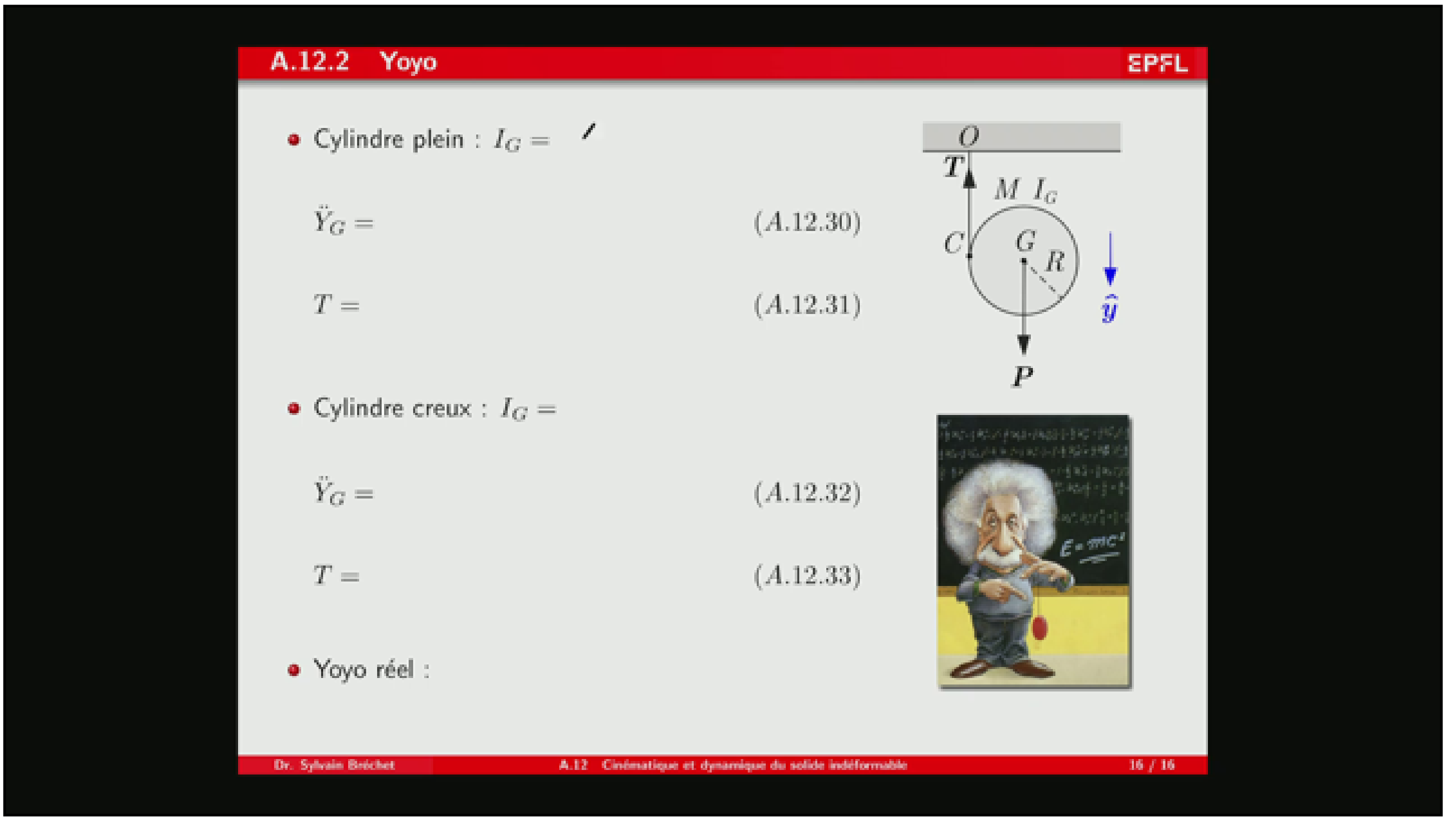


le tout YG point point doulontire YG point point qui est MR carré sur IG plus MR carré le tout fois le champ gravitationnel on peut aussi déterminer rapidement la tension en multipliant la première équation par la deuxième par la masse et en les comparant par identification des membres de gauche on trouve alors que IG MG moins IG T est égal à MR carré T ce qui nous donne pour la tension IG divisé par IG plus MR carré le tout maintenant pour terminer rapidement on va prendre deux cas de figure extrême

notes

résumé

45m 18s

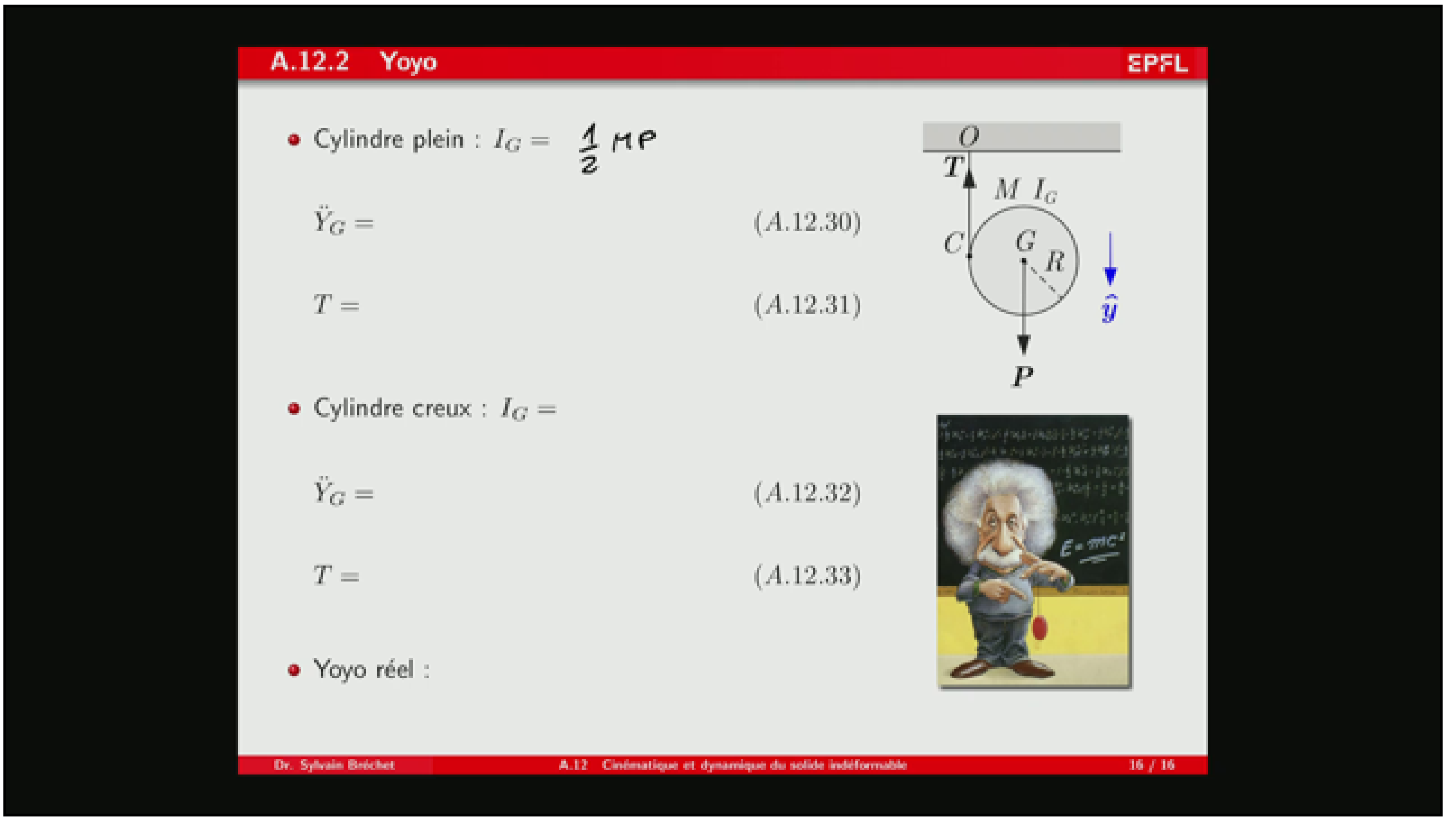


un premier cas où on a un cylindre qui est complètement homogène d'accord ? c'est le yoyo à un comportement qui est proche de ce comportement là dans ce cas là on démontrera la semaine prochaine le moment d'inertie IG

notes

résumé

46m 11s

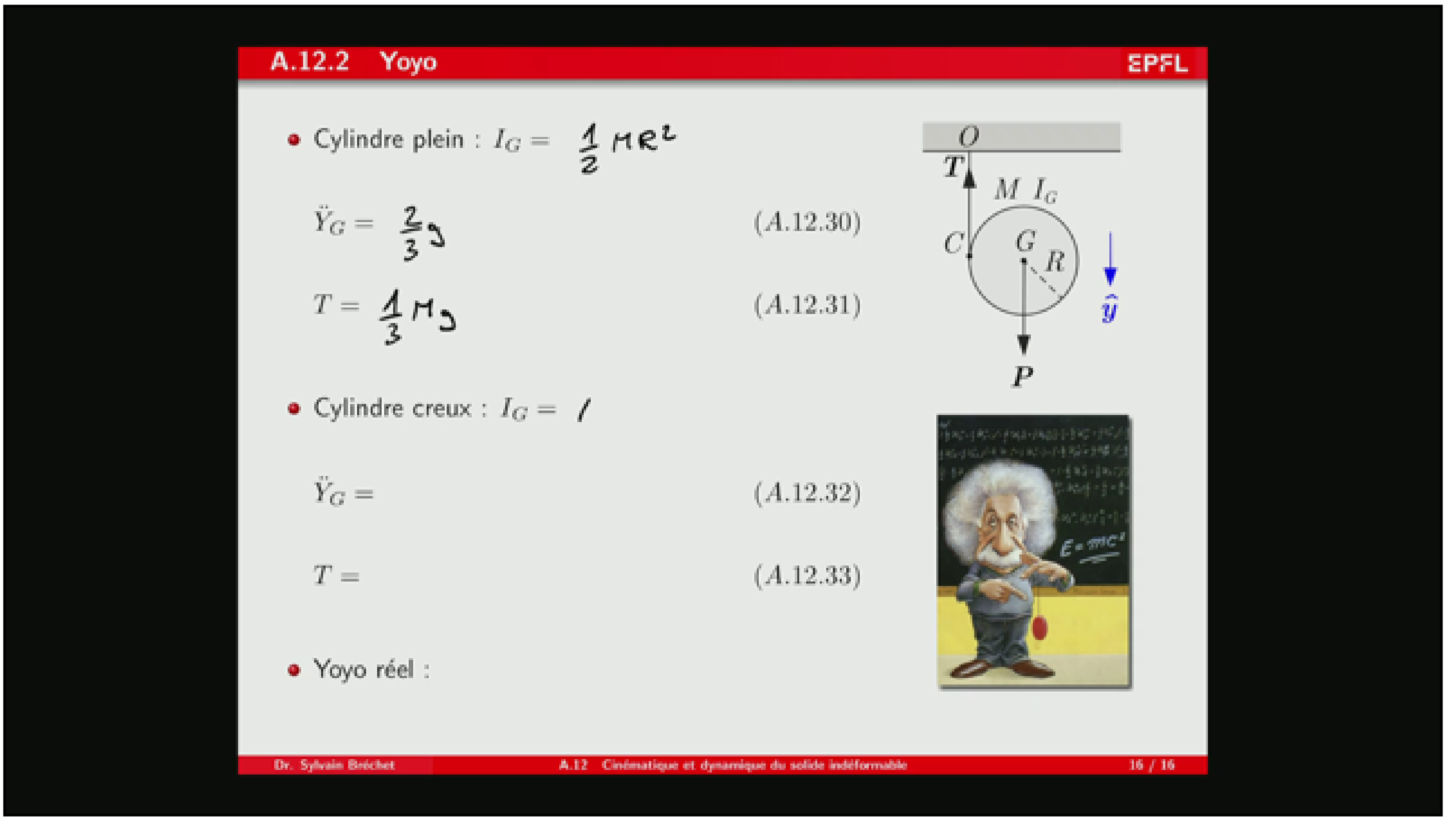


c'est une demi de MR carré

notes

résumé

46m 24s

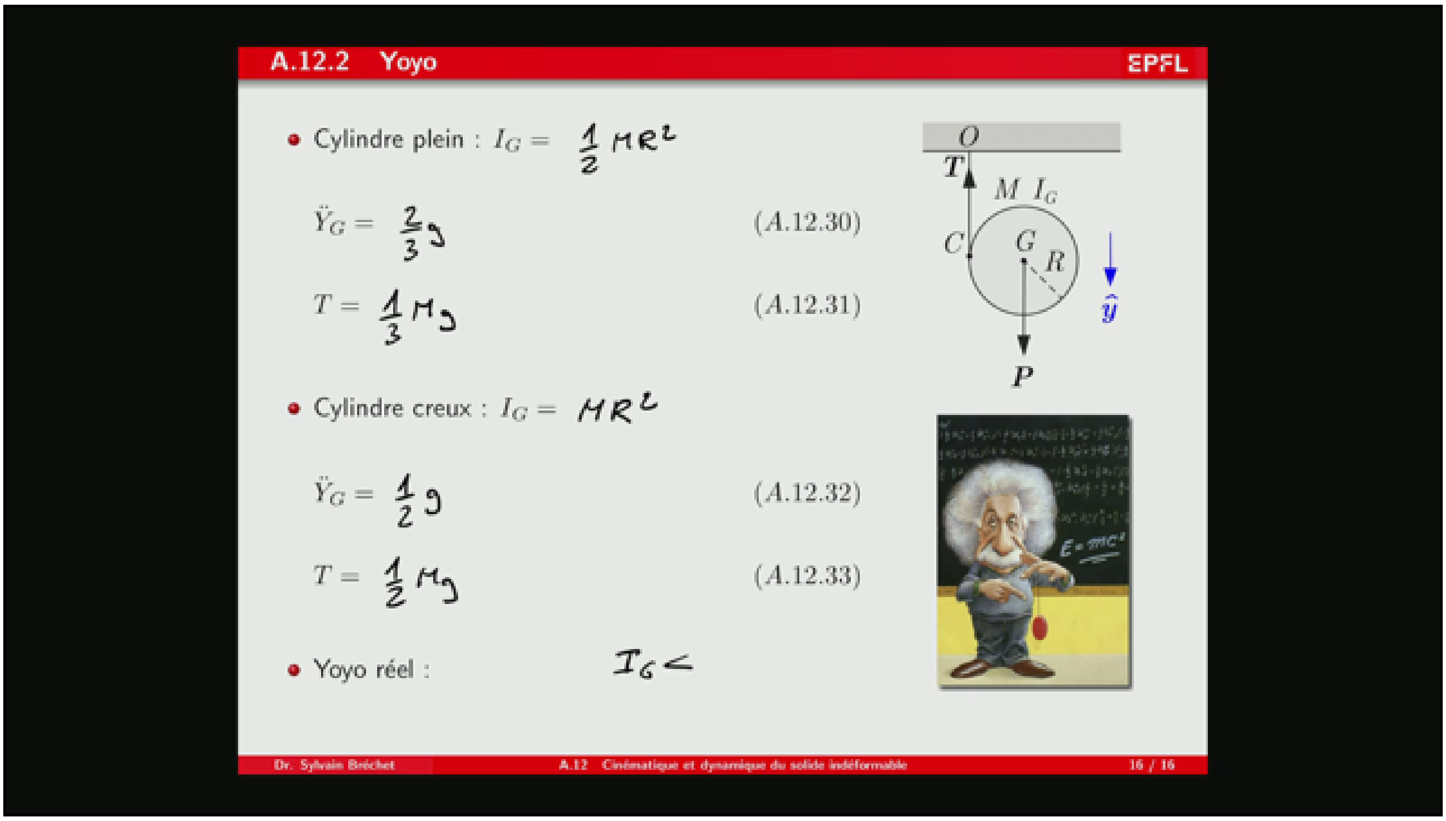


alors maintenant si vous faites la substitution vous trouvez que l'accélération du centre de masse c'est pas G non, c'est les deux tiers de G elle est inférieure à G la tension c'est pas MG non, la tension c'est un tiers de MG je vais vous expliquer pourquoi dans quelques secondes si on prend l'autre cas où toute la masse du yoyo se trouve répartie sur sa circonférence imaginez par exemple une route vélo avec des rayons de masse négligeable d'accord ? à ce moment là quelque chose qui ressemble à ça le moment d'inertie

notes

résumé

46m 26s



IG est MR carré et alors vous trouvez que YG ce point ce n'est que une demi de G et la tension c'est une demi de MG pourquoi ? parce que quand le yoyo descend il y a une partie de l'énergie potentielle de pesanteur qui convertit en énergie cinétique de translation du centre de masse et l'autre convertit en énergie cinétique de rotation du solide indéformable et c'est la raison pour laquelle l'accélération n'est pas aussi grande que celle qu'on aurait dans le mouvement de chute type d'impromatériel d'accord ? et dynamiquement on se rend compte qu'alors la tension est-elle aussi inférieure à la valeur qu'on aurait à l'équilibre lorsqu'on a simplement une masse suspendue et un fil où la tension est l'opposé du poids dans le carré L le moment d'inertie IG a une valeur compris entre ces deux extrêmes et comme vous pouvez le voir sur le dessin il semble il semble donc que le yoyo est inspiré le célèbre Albert Einstein pour trouver ces équations de base de la relativité restreinte qui est égale à une séquare peut-être que c'est une légende peut-être que c'est part de la réalité je vais vous laisser sur sa suspense et je vous souhaite une excellente fin de semaine

notes

résumé

47m 0s